THE FIRST BOOK

OF

LID'S ELEMENTS OF GEOMETRY

FOR

GUJARATI SCHOOLS.

BY

JAMSHEDJEE ARDESAIR DALAL, M. A., LL. B.

FORMERLY PRINCIPAL, GUJARAT COLLEGE, AHMEDABAD.

વેચનાર

મોતીલાલ મગનલાલ શાહ

બુકસેલર

રીચીરોડ—અમદાવાદ,

અને

૩૭૩ કાલબાદેવી રોડ,—મુંબઈ.

THE FIRST BOOK

OF

Euclid's Elements of Geometry.

FOR

GUJARATI SCHOOLS.

BY

JAMSHEDJEE ARDESHIR DALAL, M. A., LL.B.

FORMERLY PRINCIPAL, GUJARAT COLLEGE, AHMEDABAD.

SEVENTH EDITION

AHMEDABAD–Richey Road. } M. M. Shah & sons.

BOMBAY–Kalbadevi. } *Booksellers & Publishers.*

Ahmedabad,

THE "DIAMOND JUBILEE" PRINTING PRESS.

A. D. 1906. Samvat 1962.

Price As. 8.

યુકિલડની ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વો

સ્કંધ ૧.

ગૂજરાતી નિશાળોને માટે.

જમશેદજી અરદેશર દલાલ,

એમ. એ. એલ એલ. બી.

અમદાવાદ ગૂજરાત કૉલેજના માજી પ્રિન્સિપાલ એઓએ રચ્યો.

સાતમી આવૃત્તિ.

સોલ એજન્ટસઃ—

અમદાવાદ—રીચીરોડ.
મુંબાઇ—કાલ્બાદેવી.

મોતીલાલ મગનલાલ શાહ
એન્ડ સન્સ.
બુકસેલર્સ એન્ડ પબ્લીશર્સ.

ઇ. સ. ૧૯૦૬ સંવત ૧૯૬૨,

અમદાવાદ.

ધી ડાયમન્ડ જ્યુબીલી પ્રિન્ટિંગ પ્રેસ.

કિંમત ૮ આના.

પ્રસ્તાવના.



ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વનું ભાષાન્તર ઘણાં વર્ષ ઉપર ઉત્તર વિભાગના ગૂજરાતી ભાષાન્તરકર્ત્તા મેહેરબાન જેમ્સ ગ્રેહામ સાહેબે ગૂજરાતી ભાષામાં પ્રસિદ્ધ વિદ્વાન મેહેરબાન નંદશંકર તુળજાશંકરની અમૂલ્ય સહાયતાથી કર્યું હતું. ઘણી રીતે એ ભાષાન્તર ઉત્તમ છે, તોપણ એ વિષયમાં પ્રવેશ પામેલા વિદ્યાર્થી શિવાય બીજાઓને એ સ્પષ્ટ અને સુગમ પડે એવું નથી. એની ભાષા સંક્ષિપ્ત છે. અને સિદ્ધાંતનો પક્ષ પણ તેવાજ સંક્ષેપમાં સિદ્ધ કર્યો છે, પક્ષમાંનાં સ્પષ્ટ અથવા સેહેલથી સમજાય એવાં સિદ્ધતાનાં કારણો મૂકી દેવામાં આવ્યાં છે, અને માત્ર મુખ્ય કારણજ આપ્યાં છે. એ પુસ્તક ઉંચા વર્ગના શિષ્યોને માટે લખેલું હોય એમ સ્પષ્ટ ભાસે છે. કેમકે એમાં આપેલી ટીકાથી પણ વાંચનારનું મન ગણિતશાસ્ત્રનાં ઉંચાં પ્રકરણ તરફ લોભાય છે. પણ એ ગ્રન્થનો હેતુ નવાસવા શિષ્યોને મદદ કરવાનો નથી અથવા હલકા વર્ગની પરીક્ષા માટે શાલાપુસ્તક તરીકે ખપવાનો નથી. તેથી એવી મતલબ એ ગ્રન્થથી સરે નહિ, અને વર્ગમાં નવાસવા શિષ્યોને આ વિષય શિખવવો હોય એવા શિક્ષકો તરફથી એ ગ્રન્થની સામા વાજબી વાંધો ઉઠે એમાં કંઈ નવાઇ નથી. આ કારણથી કેળવણીખાતાના અધિપતિએ અંગ્રેજી નિશાળોમાં નીચલા વર્ગમાં ચાલતા ઉત્તમ ગ્રન્થોનો નમુનો લઈ ગૂજરાતીશાળા માટે બીજું ભાષન્તર તૈયાર કરવા હુકમ કર્યો.

તેજ પ્રકારનો પ્રયત્ન આ પુસ્તકમાં કરવામાં આવ્યો છે. આ ગ્રન્થને સેહેલી તેમજ શુદ્ધ ભાષામાં લખવાને ઘણીજ સંભાળ

લીધી છે; અને આશા રાખવામાં આવે છે કે શિક્ષકોને આ વિષય શિખવવાની મેહેનત ઓછી પડશે એટલુંજ નહિ પણ ઉદ્યોગી શિષ્ય શિક્ષકની મદદથી અથવા મદદ શિવાય પણ આ વિષયમાં સારૂં જ્ઞાન સંપાદન કરવા શક્તિમાન થશે.

પારિભાષિક શબ્દો મેહેરબાન ગ્રેહામ સાહેબના ભાષાન્તરમાંથી લીધા છે. પણ રા૦ રા૦ રાવજી મોરેશ્વર દેવકુળેની મરાઠી ભૂમિતિમાંથી ઘણી અમૂલ્ય સૂચનાઓ મળી આવી છે. ઘણા સવાલ પણ એમનાજ ગ્રન્થમાંથી દાખલ કીધા છે. આ માટે ઘણી ખુશીથી હું એમનો ઉપકાર માનું છું.

આ ગ્રન્થની સામાન્ય રચના ઉત્તર વિભાગના કેળવણી ખાતાના પરીક્ષક મેહેરબાન જાઇલ્સ સાહેબના કહેવા પ્રમાણે હૉલ અને સ્ટીવન્સની ભૂમિતિ ભાગ ૧ ને અનુસરીને કીધી છે. આ ભૂમિતિ પુસ્તક હાલમાં નવાં લખાયલાં પુસ્તકોમાંનું એક છે, અને અંગ્રેજી નિશાળોમાં શાળાપુસ્તક તરીકે ઘણું ફત્તેહમંદ નીવડ્યું છે. એ પુસ્તક રચનારાઓએ પોતાનાં શાળાપુસ્તકોની રચના ઘણા અનુભવી શિક્ષકોની અનુમતિ લઇ કીધી છે, અને એ શિક્ષકો તરફથી તેમને ઘણી કિમતિ સૂચનાઓ મળી છે. તે અંગ્રેજી પુસ્તકને અનુસરીને આ ગ્રન્થ લખવામાં આવ્યો છે; તેથી એ ગ્રન્થનો હેતુ બરોબર પાર પડશે એવી આશા રાખવામાં આવે છે.

'પૉટ્સ અને ટૉડહન્ટર' ના ગ્રન્થોમાં આપ્યાં છે તેમજ સિદ્ધતાનાં બધાં કારણો અનુક્રમે આપ્યાં છે. વળી સિદ્ધતા સ્પષ્ટ કરવા માટે નવાં કારણો પણ દાખલ કર્યાં છે; પણ એવું ક્વચિતજ કરવામાં આવ્યું છે, જેમકે પેહેલા સ્કંધના ૪૪મા સિદ્ધાંતમાં દરેક સિદ્ધાંતમાં પ્રતિજ્ઞા, સાધન, રચના, અને સિદ્ધતા ખુલ્લી રીતે પૃથક્ પાડ્યાં છે, અને પ્રત્યેક નવું સિદ્ધાંતનું કારણ

નવી લીટીમાં શરૂ કર્યુ છે. વિદ્યાર્થિને આ વિષયને લગતી આજૂ-બાજૂની બાબતમાં મદદ કરવાને ગૂજરાતી ભાષામાં ગ્રન્થ ન હોવાથી સઘળી વ્યાખ્યાઓ, સ્વીકૃતકૃત્યો, અને પ્રત્યક્ષપ્રમાણો ઉપર પુષ્કળ ટિપ્પણ આપ્યું છે, અને એ શબ્દો બરોબર સમજાવવા ઘણી મેહેનત લીધી છે. વળી સઘળા અગત્યના સિદ્ધાંતો-ઉપર પણ ઘણી ટીકા કરવામાં આવી છે.

દરેક સિદ્ધાંતને લગતા થોડાક સવાલ આપવામાં આવ્યા છે. એમાંના ઘણા આકૃતિમાં અથવા રચનામાં લીટીઓનો ફેરફાર કરવાના સંબંધમાં આપ્યા છે. અગત્યના સિદ્ધાંતના દરેક સમૂહને અન્તે સેહેલા પ્રશ્નો આપવામાં આવ્યા છે, આ બધા સવાલો અને પ્રશ્નો યાતો વર્ગમાં અથવા ઘેરથી મનોયત્ન તરીકે શિષ્યવર્ગ પાસે શિક્ષક સિદ્ધ કરાવશે તો ઘણો ફાયદો થશે. આસરે સો સવાલ બધું મળીને છે અને તેટલાજ પ્રશ્નો પણ છે.

અઘરો સિદ્ધાંત સુગમ કરવાની મતલબથી કેટલેક પ્રસંગે, જેમકે ચોથા સિદ્ધાતમાં, સિદ્ધાત સિદ્ધ કરતા પહેલાં સમજુતિ માટે ટિપ્પણ આપવામાં આવ્યું છે. એવી જાતનાં ૬, ૭ અને ૨૭ સિદ્ધાંત ઉપરનાં ટિપ્પણથી શિક્ષકને શિખવવાના કામમાં ઘણી સહાયતા મળશે એમ ધારવામાં આવે છે.

જ૦ અ૦ દ૦

અમદાવાદ.
જુલાઈ ૧૮૮૮.

સૂચના.



પંદર સોળ વર્ષની મુદતમાં આ શાળોપયોગી ગ્રન્થની મૂળ ,૩૪૦૦૦ પ્રતો ખપી જવાથી, સરકારી ગુજરાતી શાળાઓને માટે આ સાતમી આવૃત્તિ મેહેરબાન ડિરેકટર ઑફ પબ્લિક ઇન્સ્ટ્રકશન સાહેબના હુકમથી પ્રથમ જેવીજ સફાઇથી અને તેટલીજ કિમ્મતે છપાવવામાં આવી છે. ટુંક વખતમાં સારો ખપ થઇ જવાથી ખાત્રી થાય છે કે ભૂમિતિના વિષય માટે સર્વ પ્રકારે અનુકૂળ આ ગ્રંન્થ થયો છે, એટલે એમાં બીજો કાંઈ ફેરફાર કરવામાં આવ્યો નથી.

મુંબાઈ,
ઑક્ટોબર ૧૯૦૫. } જ૦ અ૦ દ૦

યુક્લિડની
ભૂમિતિનાં મૂલતત્ત્વો.

સ્કંધ પહેલો.

કોઈપણ પારિભાષિક શબ્દોનો અર્થ જે વાક્યમાં કહેલો હોય તે વાક્યને તે શબ્દની વ્યાખ્યા સમજવી.

વ્યાખ્યાઓ. (૧–૪)

૧. બિંદુ તેને કહેવું કે જેને સ્થિતિ છે, પણ જેને કાંઈ મહત્વ નથી. (એટલે જેનો ભાગ થઈ શકે નહિ.)

૨. લીટી તેને કહેવી કે જેને લંબાઈ છે, પણ પહોળાઈ નથી.

૩. ઉપલી બે વ્યાખ્યાઓ ઉપરથી સ્પષ્ટ છે કે લીટીના છેડાઓ તે બિંદુ હોવા જોઈએ અને બે લીટીઓ એકેકને કાપે ત્યાં એક બિંદુ હોવું જોઈએ.

૪. સીધી લીટી તેને કહેવી કે જેના બે છેડાઓ વચ્ચે સમાન રહેલી હોય.

આ વ્યાખ્યાઓ વિશે થોડી સમજ આપવાની જરૂર છે.

(૧). આપણે સાધારણ રીતે એક બિંદુનો વિચાર તો એક અનુસ્વારનો, જેમકે 'બિંદુ' શબ્દમાં 'બિ'ને માથે હોય છે તેનો કરિયે છિયે; પણ ૧ વ્યાખ્યા પ્રમાણે તો ગણિતવિદ્યાનું એ

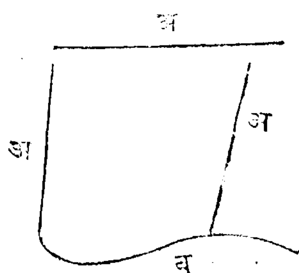
બિંદુ કહેવાઇ શકે નહિ. કારણ એ બિંદુ ગમે એવું ઝીણું હોય તોપણ એને કાંઇ પણ મહત્વ તો હોવું જોઇએજ. જો આપણે એક સૂક્ષ્મદર્શક યંત્ર વડે એને જોઇશું તો એ મ્હોટું દેખાશે; અને જો ઘણાંજ સૂક્ષ્મ અને બારીક હથિયારો આપણી પાસે હોય તો એવાં બિંદુના તો ભાગ કરી શકિયે; આ ઉપરથી તો આપણે જોઇએ છીએ કે એને મહત્વ તો છે, જો ન હત તો ભાગ થઇ શકત નહિ. ત્યારે સવાલ કે એ વ્યાખ્યા પ્રમાણેનું બિંદુ કેવું હશે? એનો જવાબ આપવો કઠણ છે; પણ ધારો કે એ ન્હાના બિંદુનો એક ઘણોજ ન્હાનો ભાગ લઇએ; પછી તે ભાગનો વળી એક ઘણોજ ન્હાનો ભાગ લઇએ; પછી તેનો ન્હાનો ભાગ લઇએ; એમ કરતાં એટલે સુધી ભાગ લેતા જઇએ કે છેલ્લે અનન્ત ઘટાડો કરવાથી જે રહે તેનો ભાગ થઈ શકે નહિ. આ જે છેલ્લે અવિભાજ્ય બિંદુ રહ્યું તેનું નામ ભૂમિતિનું બિંદુ. એ બિંદુ તો કલ્પનાનું છે. કાંઇ પણ નિશાની મુકી તો તેને તુરતજ મહત્વ લાગું પડ્યું. માટે એ બિંદુ ખરેખરૂં કહેતાં તો દર્શાવાઇ શકાયજ નહી. પણ આટલા ઉપરથી વિદ્યાર્થીએ ગુંચવાઇને એમ ન ધારવું કે ભૂમિતિમાં તો ફક્ત કલ્પનાના વિચારો છે. વ્યાખ્યાઓ તો શુદ્ધ ગણિતવિદ્યા પ્રમાણે આપવી જોઇએ; પણ એ બિંદુનો પ્રકાશ મન ઉપર પાડવા માટે તો એક ઝીણું ટપકું વિચારવુંજ જોઇએ. એટલું યાદ રાખવું કે તે કલ્પિત છે, અને તેનો ભાગ થઇ શકે નહિ.

(૨). બિંદુ વિશે ઉપર પ્રમાણે સમજ આવી તો પછી લીટીનો વ્યાખ્યા પ્રમાણેનો વિચાર મનમાં સહેલથી ઉત્પન્ન થશે. એવાં અગણિત બિંદુઓ એકેકની જોડાજોડ એકજ દિશામાં આવેતો લીટી થાય; અથવા કલ્પનામાં એવું ધારીએ કે આવું એક ગણિતવિદ્યાનું બિંદુ અવકાશમાં ચલન પામીને એક સ્થલથી બીજે સ્થલે ગયું, અને તેના માર્ગ ઉપર આપણે નિશાની કરી

રાખી તો આ માર્ગ તે લીટી થઇ. હવે એ તો સ્પષ્ટ છે કે આવો વિચાર લીટીનો લઇએ તો તેની લીટીને લંબાઇ માત્રજ છે; પહોળાઇ નથી. કારણ કે બિંદુને પહોળાઇ નથી અને તેવું વગર પહોળાઇનું બિંદુ એક સ્થલથી બીજે સ્થલે સીધું ચાલ્યું ગયું તો તે માર્ગને પહોળાઇ તો આવીજ નહિ. આ ગણિતશાસ્ત્ર પ્રમાણે લીટીની વ્યાખ્યા થઇ; અને તેનો વિચાર પણ ઉત્પન્ન થઇ શકશે. પણ આવી લીટી આપણે જોઇ શકતા નથી; અથવા દોરી પણ શકતા નથી. એવી લીટી પ્રત્યક્ષ જણાઇ શકતી નથી; કારણકે ગમે તેવી ઝીણી લીટી દોરીએ તેને કાંઇપણ જાડાઇ તો હોયજ. પણ જેમ એક બિંદુ દર્શાવવા માટે ટાંપ મુકીયે તો ચાલે. તેમ કલ્પિત લીટીને માટે એક પાતળી લીટી દોરીએ તો ચાલે

(૩). આવી બે લીટીઓ એકેકો છેડો જે જગ્યાએ છેદે ત્યાં બિંદુ હોવું જોઇએ, એ તો સ્પષ્ટ છે; અને ઉપર કહ્યું તેમ લીટી જો બિંદુના વેગથી થની હોય તો લીટીને બન્ને છેડે એટલે આરંભે અને અન્તે બે બિંદુઓજ હોવાં જોઇએ. જો બે આપેલાં બિંદુઓ વચ્ચે એક લીટી દોરીએ તો તે **સમર્યાદ** કહેવાય. પણ જો તેમ કરતાં એક અથવા બન્ને બાજુએથી તે લીટી ગમે તેટલી લંબાવી શકાય તો તેને **અમર્યાદ** લીટી કહેછે.

(૪). લીટી બે પ્રકારની હોઇ શકે; સીધી લીટી જેમકે अ; અને વક્ર લીટી અથવા આડી લીટી જેમકે व. अ લીટી તેના બે છેડાઓ વચ્ચે સમાન રહેલી છે; એટલે



જો એક છેડે આંખ અડકાડીને તે લીટીની દિશાએ જોઇશું તો તે

છેડેનું એક બિંદુજ દેખાશે, બીજાં તે લીટીનાં બિંદુઓ દેખાશે નહિ. પણ ब લીટી એવી નથી.

ટીપઃ-વિદ્યાર્થીએ એવી ભૂલ કરવાનો સંભવ છે કે, એક કાગળ લખતાં કોઇ સીધી લીટીઓ લખી શકે છે, અને કોઈ વધારે કે ઓછી આડી લીટીઓ લખે છે, તેમ અહિંયાં પણ સીધી અને આડી લીટી વચ્ચે તફાવત હશે; પણ તેમ નથી, એ ખુબ ધ્યાનમાં રાખવું.

ઉપલી આકૃતિઓ ઉપરથી જણાશે કે अ વાળી બધી લીટીઓ સીધી છે; માત્ર ब આડી અથવા વક્ર છે.

"બે બિંદુઓની વચ્ચે જે ટુંકામાં ટુંકું અન્તર તે સીધી લીટી" એવી કોઇ વાર સીધી લીટીની વ્યાખ્યા લખાય છે; તે પણ ખરી વ્યાખ્યા છે એવું જણાશે.

વળી એ પણ સ્પષ્ટ છે કે જો બે અમર્યાદ સીધી લીટીઓ અવકાશમાં એવી રીતે મળે કે બન્નેની દિશા એકજ હોય, તો પછી તે બેમાંની કોઇપણ લીટી તે દિશા છોડીને નિરાળી દિશાએ જઇ શકશે નહિ; કારણ કે જો તેમ થાય તો સીધી લીટીની વ્યાખ્યાથી ઉલટું થાય.

अ •————•————• ब
क

આ આકૃતિમાં अ અને ब સીધી લીટીઓ क બિંદુમાં એવી રીતે મળે છે કે તેમની દિશા સરખીજ છે તો તે બે મળીને એકજ લીટી થશે. હવે પછી એ બેમાંની એક લીટી બીજીથી જૂદી પડનાર નથી. એમ પણ સિદ્ધ થઇ શકે કે જો બે સીધી લીટીઓમાં બે બિંદુ સાધારણ હોય તો તે બે સીધી લીટીઓ એકેકની ઉપરજ પડશે.

બે સીધી લીટીઓ એકેકને મળી ન જાય તો એકજ બિંદુમાં

એકેકને છેદશે; એકથી વધારે બિંદુમાં છેદી શકે નહિ તે પણ દેખીતુંજ છે.

વ્યાખ્યા (૫–૭).

૫. જેને લંબાઈ અને પહોળાઇજ માત્ર હોય તેને સફાઇ કહે છે.

૬. સફાઈના છેડાઓ લીટીઓથી થયલા હોયછે.

૭. સપાટ સફાઇ તેને કહેવી કે જે તેના છેડાઓની વચ્ચે સમાન રહેલી હોય; અથવા જેમાં કોઇ પણ બે બિંદુઓ લઇને એક બિંદુથી બીજા સુધી એક સીધી લીટી દોરિયે તો તે સીધી લીટી તે સફાઇની અંદરજ પડે અને બહાર જાય નહિ.

(૫) જેમ બિંદુના ચલનથી લીટીની કલ્પનાનો નિશ્ચય થાય છે, તેમ લીટીના ચલનથી સફાઇની કલ્પના મળી શકેછે. જો એક ગણિતવિદ્યાની રેખા ચલન પામે એમ ધારિયે અને જે આકાશમાં તે ચલન પામે છે તેમાં કાંઈ નિશાની પડે, તો તે નિશાની એક સફાઇ દર્શાવશે. એ તો દેખીતુંજ છે કે જ્યારે લીટીને ફક્ત લંબાઇજ હોયછે અને જાડાઇ કે પહોળાઇ હોતી નથી ત્યારે લીટીના ચલનથી જે સફાઇ ઉત્પન્ન થઇ તેને લંબાઇ તથા પહોળાઇજ હોઇ શકે; પણ તેને જાડાઇ હોઇ શકે નહિ.

ધારો કે એક સીધી લીટી અથવા દોરી ચુનામાં અથવા ચાકમાં પલાળીને એક ટેબલના સપાટ મથાળા ઉપર તેના બન્ને છેડા ખેંચી રાખીને ફેરવિયે; તો તે ટેબલના ઊપર સફેદ રંગની આકૃતિ પડશે; એ એક સફાઇ થઇ; એને લંબાઈ પહોળાઇ છે; પણ જાડાઇ નથી.

(૬) વળી એ દોરી ગમે તેમ પકડીને ગમે તે પ્રકારની આકૃતિ પાડી હોય તોપણ તે આકૃતિને છેડે તો લીટીજ બનવાની.

(૭) જો એક સપાટ ટેબલના મથાળા ઉપર ન ફેરવતાં એવી દોરી એક પૃથ્વીના ગોળા ઉપર ફેરવી હોય તોપણ એક સફાઇની આકૃતિ આવશે; પણ તે કાંઇ સપાટ સફાઇ થશે નહિ; ટેબલ ઉપર બનાવેલી સફાઇમાં તો બે બિંદુઓ જોડીશું તો તે જોડનારી લીટી ટેબલ ઉપરજ રહેશે; પણ આ ગોળા ઉપરની સફાઇમાં તો એવાં બે બિંદુઓ એક લીટીથી જોડીશું તો તે લીટી ગોળાની અંદરથી પડશે, અને ગોળાની સફાઇ ઉપર પડશે નહિ. આ ઉપરથી સફાઇ અને સપાટ સફાઇ વચ્ચેનો ફેર સમજ પડશે. જે સફાઇ સપાટ ન હોય તેને વક્ર સફાઇ કહે છે.

ટીપઃ—કોઈપણ નક્કર પદાર્થ લઇયે તો તેના મહત્વના ત્રણ પરિમેય અથવા પ્રકાર હોય છે; (૧) લંબાઈ, (૨) પહોળાઇ,(૩) ઊંચાઈ અથવા જાડાઇ. ધારો કે એક ચોપડી લીધી, તો તેને એ ત્રણે પરિમેય લાગુ પડશે. હવે એ ચોપડીને ટેબલ ઉપર મૂકીને તેનું ઉપરનું સપાટ મથાળુંજ જોઇએ તો તેની ફક્ત લંબાઇ અને પહોળાઇજ દેખાશે; માટે તે સફાઈ કહેવાય; પણ એમ નહિ સમજવું કે તે ચોપડીનું પુઠું ફાડી લીધું તો તે સફાઈ થશે; કારણ કે તેને જરાપણ જાડાઇ હશેજ; એટલે તે તો નક્કર પદાર્થ થયો. પણ જાડાઇ ન વિચારતાં ફક્ત પુઠાના ઉપલા ભાગની આકૃતિનોજ કલ્પનામાં વિચાર કરિયે તો તે સફાઈ. એજ સફાઈને છેડે ચાર લીટીઓ આવી, તે લીટીઓનો પણ કલ્પનાથી એવો વિચાર કરવો કે તેને લંબાઇજ છે; પણ જાડાઇ અથવા પહોળાઇ નથી તો તે ગણિતની લીટી થઇ; અને જે ખૂણે લીટીઓ મળે છે તે બિંદુઓ થયાં.

આ ઉપરથી જણાશે કે,

૧. નક્કર પદાર્થ દેખીતો છે અને તેને લંબાઇ, પહોળાઇ, તથા જાડાઇ ત્રણે હોય છે.

૨. સફાઇ કલ્પનાથી વિચારાય છે; અને તેને લંબાઇ તથા પહોળાઇ બેજ હોય છે; જાડાઇ હોતી નથી.

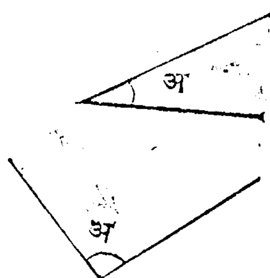
૩. લીટી કલ્પનાથી વિચારાયછે; અને તેને એકલી લંબાઇજ હોય છે.

૪. બિંદુ કલ્પનાથી વિચારાય છે; અને તેને કોઈ પણ જાતનું મહત્વ હોતું નથી.

વ્યાખ્યા (૮–૯).

૮. બે લીટીઓ એકજ સફાઇમાં હોય પણ એકજ દિશામાં ન હોય તો એવી બે લીટીઓની પરસ્પરની વક્રતા એટલે ઝોકને સમતલ ખૂણો કહેછે.

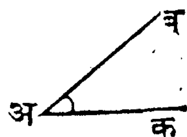
૯. જો બે સીધી લીટીઓ એકેક સાથે એકજ સફાઇમાં મળે, પણ એકજ દિશામાં જોડાઈ જતી ન હોય, તો તેઓની પરસ્પરની વક્રતા એટલે ઝોકને સમતલ સીધીલીટીખૂણો કહેછે.



૮ મી વ્યાખ્યામાં કહેલો ખૂણો આ ભૂમિતિમાં વપરાતો નથી; અને ૯ મી વ્યાખ્યા પ્રમાણે સીધી લીટીઓથી થયલો ખૂણોજ વપરાયછે, માટે ઘણું કરીને એને માત્ર "ખૂણો" કરીનેજ

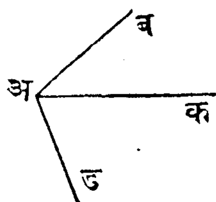
કહેવામાં આવેછે; અને "ખૂણો" શબ્દ લખ્યો હોય ત્યારે હવેથી "સમતલ સીધી લીટી ખૂણો" સમજવો.

જે બે લીટીઓ મળવાથી એક ખૂણો થાય તે લીટીઓને તે ખૂણાની બાજૂઓ કહેવી; જેમકે **अ** ખૂણો છે; તેની **अक** અને **अख** બાજૂઓ છે. એ તો દેખીતુંજ છે કે



એ બાજૂઓ આ આકૃતિમાં છે તે કરતાં ગમે એટલી વધારે લાંબી અથવા ટુંકી દોરી હોય તો ખૂણાના કદમાં કાંઇ ફેર પડનાર નથી; માટે યાદ રાખવું, કે લીટીઓ ન્હાની મ્હોટી હોય તે ઉપર ખૂણાના પરિમિતનો આધાર નથી.

જે બિંદુએ બન્ને બાજૂઓ મળેછે તેને ખૂણાનું **શિરોબિંદુ** કહેછે, અને કોઇ કોઇ વાર તે બિંદુના નામથીજ ખૂણો દેખાડાયછે; જેમકે **अ** ખૂણો; પણ જો **अ** આગળથી બેથી વધારે લીટીઓ મળે તો તો એકથી વધારે ખૂણા થાય; જેમકે આ આકૃતિમાં **अ**



બિંદુ આગળ ત્રણ ખૂણા થએલા છે; (૧) **अख** અને **अड** લીટીઓ વચ્ચે; (૨) **अख** અને **अक** લીટીઓ વચ્ચે; અને (૩) **अक** અને **अड** લીટીઓ વચ્ચે; એમાંનો પહેલો ખૂણો બીજા બેના સરવાળા બરોબર છે. હવે એ બધાને તો **अ** ખૂણા કરીને કહેવાયજ નહિ; કારણ કે ત્રણે જૂદા જૂદા પરિમિતના છે. અને જૂદી જૂદી લીટીઓથી થયલા છે; માટે ખૂણાઓ દેખાડવા સારૂ એવી ગોઠવણ કરી છે કે બે ખૂણાઓ વચ્ચે ગુંચવણ પડે નહિ. તે એ કે દરેક ખૂણો એક અક્ષરથી નહિ પણ ત્રણ અક્ષરથી દેખાડવો; તેમાં શિરોબિંદુનો અક્ષર વચગાં મૂકવો; અને આસપાસ બે બાજુઓ ઊપર લખેલા અક્ષરો મૂકવા; જેમ કેઃ—

(૧) **અબ** અને **અડ** વચ્ચેનો ખુણો તે **બઅડ** અથવા **ડઅબ**.

(૨) **અબ** અને **અક** વચ્ચેનો ખુણો તે **બઅક** અથવા **કઅબ**.

(૩) **અક** અને **અડ** વચ્ચેનો ખુણો તે **કઅડ** અથવા **ડઅક**.

બે સીધી લીટીઓ એકજ સપાટમાં હોય ને તેઓને લંબાવતાં તેઓ મળે તોઃ-

(૧) જો તેઓની દિશા એકજ હોય તો મળ્યા પછી બે મળીને એકજ લીટી થશે; પણ;-

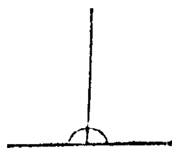
(૨) જો તેઓની દિશાઓ જૂદી હોય તો જે બિંદુ આગળ મળે ત્યાં એકેકને છેદશે. એક વખત છેદ્યા પછી ફરીથી તો છેદશે નહિજ, એ તો પ્રત્યક્ષ છે. હવે જ્યાં છેદે-છે ત્યાં તે બે લીટીઓ વચ્ચેની વક્રતા અથવા તેઓની વચ્ચેનો ઝોંક અથવા ગાળો તેને ખૂણો કહે છે. આ ઉપરથી જણાશે કે બે સીધી લીટીઓ એકજ સપાટમાં હોય પણ દૂર દૂર હોય તો તેમને લંબાવ્યા પછી એકેકને મળશે ત્યાં જે ખૂણો થાય તે તેઓની વચ્ચેનો ખૂણો સમજવો.

એવી બે લીટીઓ વચ્ચેનો ગાળો મ્હોટો ન્હાનો હોય તેમ ખૂણો પણ મ્હોટો ન્હાનો થશે; અને ખૂણાના કદનો આધાર તે ઊપરજ રહેશે. બાજૂઓ ગમે એટલી લાંબી હોય પણ પાસે પાસે હોય તો તેમની વચ્ચેનો ખૂણો ન્હાનો થશે; પણ આ બાજૂઓ ગમે એટલી ન્હાની હોય, પણ તેમની વચ્ચેનો ગાળો મ્હોટો હોય, એટલે તે બાજૂઓ દૂર દૂર હોય તો, તેમની વચ્ચેનો ખૂણો મ્હોટો થશે.

વ્યાખ્યા (૧૦–૧૨).

૧૦. જ્યારે એક સીધી લીટી બીજી સીધી લીટીને

એવી રીતે મળે કે પાસ પાસેના બે ખૂણા-
ઓ બરોબર થાય, ત્યારે
આ ખૂણાઓ માંહેલા
પ્રત્યેકને કાટખૂણો કહે-
છે, અને આ લીટીઓ-
માંહેલી પ્રત્યેક બીજી ઉપર લંબ છે એમ
કહેવાય છે.



૧૧. જે ખૂણો કાટ ખૂણા કરતાં
મ્હોટો તે પહોળો ખૂણો.

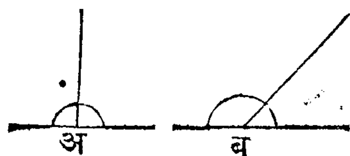


૧૨. જે ખૂણો કાટખૂણા કરતાં
ન્હાનો તે સાંકડો ખૂણો.



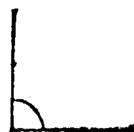
કોઇ ખૂણો ન્હાનો હોય અને કોઇ મ્હોટો હોય, એટલે ખૂણાના પરિમિતમાં ભાગો છે, એતો દેખીતું છે; હવે વિચારવાનું એ રહ્યું કે એક ખૂણો કેટલો મ્હોટો છે તે શી રીતે બતાવાય? એક લીટી કેટલી ન્હાની કે મ્હોટી છે તે તેમાં કેટલા તસુ અથવા ફુટ અથવા ગજ છે તે કહ્યાથી સમજાશે; એક ચોપડી કેટલી ભારે છે તે કેટલા તોલા અથવા શેર છે તે કહ્યાથી સમજાશે. હવે ખૂણાનું પરિમિત જાણવા સારૂ આપણે શું પરિમાણ લેવું જોઇએ? જો એક એવો ખૂણો હોય કે તેનું પરિમિત હમેશાં નિશ્ચિત અને એકજ સરખું રહેતું હોય અને બદલાતું ન હોય (જેમકે લંબાઇમાં એક ફુટ, વજનમાં એક શેર) તો તેને અમુક નામ આપીયે; ને પછી બીજા બધા ખૂણાઓનું તે ખૂણા ઉપરથી પરિમિત કહાડિયે; એવો એક ખૂણો સહે-

જમાં ધ્યાનમાં આવશે. તમારા ઓરડાની બે પાસ પાસેની ઉભી દીવાલો વચ્ચેનો ખૂણો; તમારી ચોપડીની અથવા આ પૃષ્ઠની લંબાઇ અને પહોળાઇની વચ્ચેનો ખૂણો; ભીંત અને જમીન વચ્ચેનો ખૂણો; ભીંત અને 'સીલીંગ' (છત) વચ્ચેનો ખૂણો; સુતાર અથવા કડિયો લાકડાંની બે ચીપોથી બનાવેલો ખૂણો વાપરે છે તે; એ બધા ખૂણા એકજ પરિમિતના છે, એ તો સહેજ જણાશે. જો તમને એ વિશે શક હોયતો સ્લેટનો બે ચોકઠાં વચ્ચેનો ખૂણો ઓરડાની બે ભીંતો વચ્ચેના ખુણા જોડે મેળવો તો તમને જણાશે કે એ બન્ને ખૂણાઓ સ્થાનોપરી છે; એટલે અકેક ચોકઠું અકેક ભીંતની સાથે વળગી જશે; માટે ભીંતો અને ચોકઠાં વચ્ચેના (માળા) ખૂણા પણ સરખાજ હોવા જોઇએ. આવો નિશ્ચિત ખૂણો તે કાટખૂણો; એવા એક કાટખૂણાના ૯૦ સરખા ભાગ કરિયે તો દરેક ભાગને એક અંશ કહે છે. જે વ્યાખ્યા ઉપર આપી છે તે આ પાસેની આકૃતિઓ જોતાં ખરી અને વાસ્તવિક છે એવું

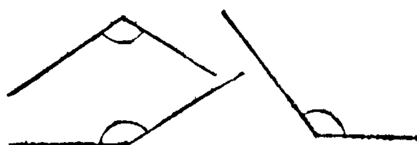


જણાશે. अ આકૃતિમાં બન્ને ખૂણા બરોબર છે અને દરેક ખૂણો દેખીતોજ કાટખૂણો છે; ब આકૃતિમાં ખૂણા ન્હાના મ્હોટા છે; અને તેમાંનો એકે કાટખૂણો નથી; દેખીતી રીતે એક કાટખૂણા કરતાં ન્હાનો, અને બીજો મ્હોટો છે.

(૧) કાટખૂણો હમેશાં એકજ નિશ્ચિત પરિમિતનો છે; માટે તેના એક સરખા ૯૦ ભાગ કીધા છે; એટલે દરેક કાટખૂણામાં ૯૦ અંશ હોવા જોઇએ.



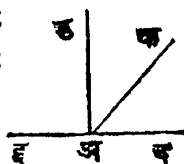
(૨) પહોળો ખૂણો કાટખૂણા કરતાં મ્હોટો છે, માટે તેમાં ૯૦ થી વધારે અને ૧૮૦થી ઓછા અંશ હોવા જોઇએ.



(૩) સાંકડો ખૂણો કાટ ખૂણા કરતાં ન્હાનો છે માટે તેમાં ૦ થી વધારે અને ૯૦ થી ઓછા અંશ હોવા જોઇએ.



ટીપઃ—(૧) જે ખૂણો કાટખૂણો ન હોય તેને (એટલે પહોળા અને સાંકડા બન્ને ખૂણાને) તિર્યક્કોણ કહેવો જેમકે:—



यअड અને डअइ એ બન્ને કાટ ખૂણાછે;
कअय, कअड એ બન્ને(સાંકડા) તિર્યક્કોણ છે;
कअइ એ પણ (પહોળો) તિર્યક્કોણ છે.

(૨) બે કાટખૂણા એટલે ૧૮૦ અંશ એથી વધારે પણ ખૂણો થઇ શકે; પણ એવા ખૂણા યુકિલડના ગ્રન્થમાં વાપરવામાં આવ્યા નથી.

વ્યાખ્યા—(૧૩–૧૪).

૧૩. કોઇ વસ્તુનો છેડો તે તેની સીમા અથવા મર્યાદા.

૧૪. જે સફાઇની એક અથવા વધારે લીટીઓથી હદ થઇ ગઇ હોય તે સફાઇને આકૃતિ કહે છે.

વ્યાખ્યા ૧૩ મી ઘણી ઉપયોગી નથી.

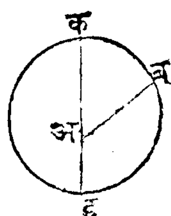
જો સફાઇ અનન્ત ન હોય તો આકૃતિ થઇ.



એક આકૃતિને હદ કરનારી બધી લીટીઓની લંબાઇનો સરવાળો લઇયે તો તેને **પરિમિતિ** કહે છે.

વ્યાખ્યા (૧૫–૧૯).

૧૫. એક સપાટ આકૃતિ જેની હદ એકજ અખંડ વક્ર લીટીથી થયેલી હોય અને જેમાં એક એવું મુકરર બિંદુ હોય કે તે બિંદુમાંથી તે વક્ર લીટી સૂધી જે સઘળી



સીધી લીટીઓ દોરિયે, તે બરોબર થાય તો તે આકૃતિને એક વર્તુલ કહેવો; અને તે વક્ર લીટીને પરિઘ કહેવો.

૧૬. જે બિંદુમાંથી આવી સરખી સીધી લીટીઓ દોરાય છે તેને તે વર્તુલનું મધ્યબિંદુ કહે છે.

૧૭. જે સીધી લીટી એક વર્તુલમાં તેના મધ્ય બિંદુમાં થઇને પાર જાય, અને જેના બે છેડાઓ પરિઘ ઉપરજ આવી મળે, તેને તે વર્તુલનો વ્યાસ કહે છે.

૧૮. વ્યાસ અને તેનાથી કપાયલા પરિઘના ભાગ વચ્ચે વર્તુલનો જેટલો ભાગ આવે તેને અર્ધવર્તુલ કહે છે.

૧૯. હરકોઈ સીધી લીટી વર્તુલમાં દોરી હોય તો તે સીધી લીટી અને કપાયલા પરિઘ વચ્ચેના ભાગને વર્તુલનો ખંડ કહે છે.

ટીપઃ—મધ્ય બિંદુમાંથી જે સરખી સીધી લીટીઓ દોરી, તેને ત્રિજયા કહે છે.

(૧) એકજ વર્તુલની બધી ત્રિજ્યાઓ સરખી હોવી જોઇએ.

(૨) એકજ વર્તુલની ત્રિજ્યા તેના વ્યાસની અરધી હોવી જોઇએ.

(૩) એકજ વર્તુલના બધા વ્યાસો સરખા હોવા જોઇએ.

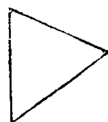
(૪) એક વ્યાસથી વર્તુલના બે સરખા ભાગ થઇ જાય છે; કારણ કે એવા બે ભાગ એકેક ઉપર ગોઠવીને મુકશું તો સ્થાનોપરી થશે; એટલે સરખી જગ્યા રોકશે; માટે દરેકને અર્ધ-વર્તુલ કહેછે.

વર્તુલની વ્યાખ્યા ઉપરથી વર્તુલ કેમ દોરવો તેની સમજ પડશે. એક દોરી લઇને તેનો એક છેડો પાટીયા ઉપર આંગળીથી દબાવી રાખવો, પછી તે દોરી ખેંચીને તેને બીજે છેડે ચાકનો કટકો જોરમાં પકડી રાખવો; હવે જો પહેલો છેડો અચલ રાખીને એટલે દાબી રાખીને ચાકવાળો છેડો ફેરવીશું તો વર્તુલની આકૃતિ આવશે. એમાં દાબેલો છેડો તે મધ્યબિંદુ, દોરીની લંબાઇ તે ત્રિજ્યા. અને ચાકની ગોળ લીટી તે પરિઘ, અને એ લીટી વચ્ચે આવેલો પાટીયાનો કાળો ભાગ તે વર્તુલ થયાં. (યાદ રાખવું કે પરિઘ અને વર્તુલ જૂદાં છે; પરિઘ તો માત્ર એક લીટી; અને વર્તુલ તો લીટીથી મર્યાદા થયલી સફાઇ; ચાકની નિશાની તે પરિઘ; અને પાટીયાનો ભાગ તે વર્તુલ). ઉપલી આકૃતિમાં अ મધ્યબિંદુ છે; अव, अक, અને अड, ત્રિજ્યાઓ, અને कड વ્યાસ છે; वकड લીટી પરિઘ; અને તેના અંદરની સફાઇ તે વર્તુલ.

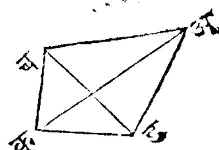
વ્યાખ્યા (૨૦—૨૩).

૨૦. જે આકૃતિની હદ માત્ર સીધી લીટીઓથી

થયલી હોય છે તેને સીધી લીટીઆકૃતિ કહે છે.



૨૧. જે સાધી સીધી આકૃતિની હદ ત્રણ સીધી લીટીઓ-થી થઇ હોય તેને ત્રિકોણ કહે છે.



૨૨. જેની હદ ચાર સીધી લીટીઓથી થઇ હોય તેને ચતુર્કોણ કહે છે ચતુર્કોણાકૃતિના સામસામેના ખુણાઓનાં શિરોબિંદુઓને સાંધનારી સીધી લીટીઓ (અક અને બડ) ને તેની કર્ણ લીટીઓ કહે છે.



૨૩. જેની હદ ચારથી વધારે સીધી લીટીઓથી થઇ હોય તેને બહુકોણ કહે છે.

જે સીધી લીટીઓથી એક સીધીલીટીઆકૃતિ થઇ હોય તે દરેક લીટીને તે આકૃતિની બાજૂ કહે છે. યાદ રાખવું કે એવી એક આકૃતિને જેટલી બાજૂઓ હોય તેટલાજ ખૂણા પણ હોવા જોઇએ.

ત્રણ કરતાં ઓછી સીધી લીટીઓથી કોઇ પણ આકૃતિ બની શકતી નથી; માટે બધી આકૃતિઓમાં ત્રિકોણ પહેલો અને બધાંનું મૂળ સમજવો. વળી કોઇ પણ આકૃતિના ત્રિકોણ તુરત બની શકે છે; જેમકે ૨૨ મી વ્યાખ્યાની આકૃતિમાં એક ચતુર્કોણાકૃતિના એ બે ત્રિકોણો અબક અને અડક થયા; માટે ત્રિકોણના ગુણો વિશે સારૂં જ્ઞાન મળે તો તે ઉપરથી બીજી આકૃતિઓના ગુણોની સમજણ સારી મળે; પહેલા સ્કંધના ઘણા ખરા ભાગમાં ત્રિકોણના ગુણો વિશેજ વિચાર કીધેલો છે.

પાંચ બાજૂના બહુકોણને પંચકોણ, છનાને ષટ્કોણ, સાતનાને સપ્તકોણ, આઠનાને અષ્ટકોણ ઇત્યાદિ કહે છે.

વ્યાખ્યા (૨૪—૨૯).

૨૪ જે ત્રિકોણની ત્રણ બાજૂઓ સરખી હોય તેને સમબાજૂ ત્રિકોણ કહે છે.



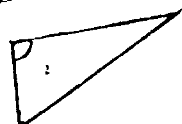
૨૫. જે ત્રિકોણની માત્ર બેજ બાજૂઓ સરખી હોય તેને સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણ કહે છે.



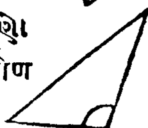
૨૬. જેની કોઈ પણ બે બાજૂઓ સરખી ન હોય તેને વિષમ બાજૂ ત્રિકોણ કહે છે.



૨૭. જે ત્રિકોણમાં એક કાટખૂણો હોય તેને કાટખૂણ ત્રિકોણ કહેવો.



૨૮. જેમાં એક પહોળો ખૂણો હોય તેને પહોળખૂણ ત્રિકોણ કહેવો.



૨૯. જે ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણા સાંકડા હોય તેને સાંકડ ખૂણ ત્રિકોણ કહેવો.



ઉપલી ૭ વ્યાખ્યાઓમાંથી પહેલી ત્રણ ત્રિકોણની બાજૂઓ સરખાવતાં થઈ છે; અને છેલ્લી ત્રણ ત્રિકોણના ખૂણાઓ સરખાવતાં થઈ છે.

જેમ જે ત્રિકોણની ત્રણે બાજૂઓ સરખી હોય તેને સમબાજૂ કહેછે, તેમજ જેના ત્રણ ખૂણા સરખા હોય તેને સમખૂણ કહેછે. આગળ ચાલતાં જણાશે કે જે ત્રિકોણની ત્રણ

બાજૂઓ સરખી હોય તેના ત્રણ ખુણા પણ સરખા હોવાજ જોઇએ.

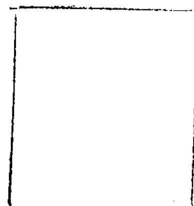
દેખીતું છે કે (૨૫) મી વ્યાખ્યામાં કહેલા ત્રિકોણના સઘળા ગુણો (૨૪) મી વ્યાખ્યાવાળા ત્રિકોણને લાગુ પડવાજ જોઇએ. આગળ ચાલતાં જણાશે કે એક ત્રિકોણમાં કાટખૂણો એકજ હોઇ શકે, અને પહોળો ખૂણો પણ એકજ હોઇ શકે. જો બે કાટખૂણા અથવા પહોળા ખૂણા આવે એવો એક ત્રિકોણ દોરવા યત્ન કરશો તો તેમ દોરાશે નહિ.

યાદ રાખવું કે એક અથવા બે સાંકડા ખૂણા કોઈ ત્રિકોણમાં હોય તો તેને સાંકડાખૂણુ ત્રિકોણ કહેવાય નહિ. કારણ કે કાટખૂણુ અને પહોળ ખૂણુ ત્રિકોણોમાં પણ બે ખુણા તો સાંકડાજ આવેછે. માટે જે ત્રિકોણના **ત્રણે** ખૂણા સાંકડા તેજ સાંકડખૂણુ ત્રિકોણ.

જો એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજૂઓ પોતપોતામાં સરખી નહોય, પણ એકની ત્રણ બાજૂઓ અનુક્રમે બીજાની ત્રણ બાજૂની બરોબર હોય તો તે બે ત્રિકોણો **અરસ્પરસ સમબાજૂ** છે એમ કહેવું.

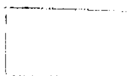
વ્યાખ્યા (૩૦—૩૪).

૩૦. ચતુર્કોણાકૃતિઓમાં જેની ચારે બાજૂઓ સરખી હોય અને બધા ખૂણાઓ કાટખૂણા હોય તેને ચોરસ કહે છે.

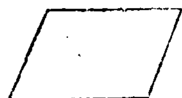


૩૧. જે ચતુર્કોણાકૃતિના બધા ખૂણા કાટખૂણા

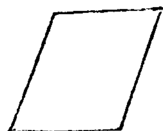
હોય પણ બધી બાજૂઓ સરખાં ન હોય તેને काटखूण चतुर्कोण કહેવો.



૩૨. જે ચતુર્કોણાકૃતિની બધી બાજૂઓ સરખી હોય પણ તેના ખૂણા કાટખૂણા ન હોય તેને समबाजू चतुर्कोण કહેવો.



૩૩. જે ચતુર્કોણાકૃતિની સામસામેની બબે બાજૂઓ સરખી હોય, પણ જેની ચારે બાજૂઓ સરખી ન હોય અને જેના ખૂણાઓ પણ કાટખૂણા ન હોય તેને राम्बाइड કહે છે.



૩૪. બીજી બધી ચતુર્કોણાકૃતિઓને विषमबाजू चतुर्कोणो કહેવા.



ચોરસની વ્યાખ્યામાં એટલુંજ કહિયે તોપણ ચાલે, કે તેની ચારે બાજૂઓ સરખી હોવી જોઇએ, અને એક ખૂણો કાટખૂણો હોવો જોઇએ; કારણ કે આગળ ચાલતાં જણાશે કે ચારે બાજૂઓ સરખી હોય અને એક ખૂણો કાટખૂણો હોય તો બીજા બધા પણ કાટખૂણાજ હોવા જોઇએ.

કાટખૂણ ચતુર્કોણના નામ ઉપરથીજ જણાશે કે તેમાં બધા ખૂણા કાટખૂણા હોવા જોઈએ; પણ બાજૂઓ અવશ્ય સરખીજ હોવી જરૂરની નથી.

તેજ પ્રમાણે સમબાજૂ ચતુર્કોણનો અર્થજ એ છે કે તે

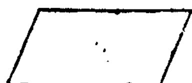
ચતુર્કોણની ચારે બાજૂઓ સરખી છે; પણ તેના ખૂણા બધા સરખા અથવા કાટખૂણા હોવાની જરૂર નથી.

રામ્બાઇડ શબ્દ ઇંગ્રેજી ઉપરથીજ લીધો છે; કારણ કે ફક્ત સામસામેની બેજ બાજૂઓ સરખી હોય એવી ચતુર્કોણાકૃતિને માટે એક શબ્દ આપણી ભાષામાં સહેલથી થઇ શકતો નથી. પણ એ આકૃતિ " સમાન્તરબાજૂ ચતુર્કોણ " જેની વ્યાખ્યા આગળ આપી છે, તેજ આકૃતિ છે; અને આગળ ચાલતાં સિદ્ધ થશે કે તે બે એકજ આકૃતિનાં નામો છે; માટે એ ઇંગ્રેજી શબ્દની જગ્યાએ તે શબ્દ બધે વાપરવામાં આવશે.

વ્યાખ્યા (૩૫–૩૬).

૩૫. જો એકજ સફાઈમાં બે સીધી લીટીઓ એવી હોય કે તેઓને બન્ને દિશાએ ગમે તેટલીવધારિયે તોપણ કદી મળે નહિ તો તેને સમાન્તર સીધી લીટીઓ કહેવી.

૩૬. જે ચતુર્કોણાકૃતિની સામસામેની બબે બાજૂઓ સમાન્તર હોય તેને સમાન્તરબાજૂચતુર્કોણ કહેવા.



સમાન્તર લીટીઓ એકજ સફાઇમાં હોવી જોઇએ; કારણ કે બે જૂદી સફાઈમાં તો બે લીટીઓ એવી હોઈ શકે કે તે એકેકને મળેજ નહીં; પણ તે કાંઇ સમાન્તર ન કહેવાય. ૩૦–૩૧–૩૨–૩૩ વ્યાખ્યાવાળી આકૃતિઓનો સમાવેશ ૩૬ માં થયલો છે; એટલે ઉપર કહેલી બધી આકૃતિઓ સમાન્તર બાજૂચતુર્કોણ છે એમ સિદ્ધ થશે.

સ્વીકૃત કૃત્યો.

૧. એવું સ્વીકારેલું છે, કે કોઈ પણ એક બિંદુથી કોઈપણ બીજા બિંદુ સૂધી એક સીધી લીટી દોરી શકાય છે.

૨. એવું સ્વીકારેલું છે, કે અન્તવાન સીધી લીટી ગમે તેટલી લંબાઇ સૂધી એક સીધી લીટીમાં વધારી શકાય છે.

૩. એવું સ્વીકારેલું છે, કે કોઈપણ બિંદુને મધ્ય બિંદુ ધારીને તે મધ્ય બિંદુથી કોઇપણ અન્તરે એક વર્તુલ દોરી શકાય છે.

સમજણ.

આ વિષયની બરોબર સમજણ પહેલાંથીજ લેવી ઘણી અગત્યની છે; માટે માત્ર એ ત્રણ સ્વીકૃત કૃત્યો મ્હોડે કરવાથી કામ થયું એમ વિદ્યાર્થીએ જાણવું નહિ; પણ આ સમજણ જરા કઠણ લાગે તોપણ ધ્યાનથી સમજ્યા શિવાય આગળ વધવું નહિ. એ બરોબર સમજ પડવા માટે નીચલા સવાલોનો વિચાર કરવાનો છે.

(૧) સ્વીકૃત કૃત્યો એટલે શું? અને એમ સ્વીકારવાનું કારણશું?

(૨) યુકિલડે માત્ર કેટલું સ્વીકારવા માગ્યું છે?

(૩) એ ત્રણ શિવાય કોઇ કૃત્યો સ્વીકારાયલાં છે કે કેમ?

એ સવાલોના જવાબ:—

૧ વિદ્યાર્થીને આગળથી ખબર તો હશેજ કે એ હજારથી વધારે વર્ષો થયાં યુકિલડની ભૂમિતિનો આગ્રહપૂર્વક અભ્યાસ

એટલા માટે કરવામાં આવે છે કે એજ એકલા શાસ્ત્રમાં તર્કશાસ્ત્રના નિયમોને બરોબર દૃઢતાથી અનુસરવામાં આવે છે, અને સિદ્ધાંતો એવી રીતે સાબિત કરવામાં આવ્યાં છે કે આગલા એકાદ સિદ્ધાંતમાં ન સાબિત કર્યું હોય એવું કોઇ પણ સિદ્ધાંતમાં સ્વીકારવામાં આવતું નથી. હવે ત્રણ કૃત્યો એવાં છે કે તે માગી લીધેલાં છે; અને તે જો આપણે નસ્વીકારિયે તો સિદ્ધાંતોનો પુરાવો આપી શકાય નહિ. એ ત્રણ કૃત્યો તેજ ઉપર લખેલાં ત્રણ સ્વીકૃત કૃત્યો છે. એ એટલાં સહેલાં છે કે તુરતજ સ્વીકારી શકાય.

(૨) એ કૃત્યો બરોબર તપાસવાં જોઇએ; અને જેટલું માગેલું છે તેટલુંજ આપવું; તેથી વધારેની જરૂર નથી. પહેલાંમાં એમ માગેલું છે કે બે બિંદુઓ એકજ સપાટીમાં હોય તો એક બિંદુથી બીજા સુધી લીટી દોરવાની એટલે કે તે બિંદુઓને એક લીટીથી સાંધવાની છુટ છે; જો **अ** અને **ब**

अ·—————————· બે બિંદુઓ હોય તો જરૂર પડે તેઓની વચ્ચે **अ** થી **ब** સુધી એક લીટી દોરી શકાય, એટલું માગી લીધું છે. બીજાં સ્વીકારાયલાં કૃત્યમાં એમ કહેલું છે કે જો જરૂર પડે તો એક આપેલી હદ થયેલી **अब** લીટી બેમાંથી ગમે તે ———·**अ** ——·**ब**——— બાજૂએ લંબાવાઈ શકાય. પણ યાદ રાખવું કે આપણે એમ સ્વીકારતા નથી કે આટલી અમુક લંબાઇ સુધી લંબાવાય; એમ ન કહેવાય કે **अब** લીટીને ચાર ઇંચ લંબાવો; અથવા કોઇ **कड** લીટી જેટલી લંબાવો. એ આપણે સ્વીકારતા નથી; પણ એટલુંજ, કે **अब** લીટી સમર્યાદ એટલે બન્ને છેડે હદ થયલી લીટી છે તેને એક અથવા બન્ને દિશાએ અમર્યાદ કરી શકાય. પહેલાં અને બીજાં સ્વીકૃત કૃત્યો કયા સાધનથી થઇ શકે તે જોવાથી વધારે સમજ પડશે.

એ બન્ને સાધારણ **વગર નિશાની કરેલી આંકણીથી** થઇ શકે; એક એવી આંકણીથી બે બિંદુ પણ સંધાઇ શકે અને એક લીટી ઉપર આંકણી મૂકીને કલમ ચલાવિયે તો બન્ને બાજુએ તે લીટી લંબાવાઇ પણ શકાય. ઉપર "વગર નિશાની કરેલી" એવા શબ્દો વાપરવાનું કારણ એ કે એક નિશાની કરેલો ફુટ અથવા ગજ લઇએ તો લીટી દોરાય અને લંબાવાય એટલુંજ નહિ, પણ અમુક લંબાઇ જેટલી પણ કરી શકાય. પણ તેવું કાંઇ યુક્લિડે પોતાની ભૂમિતિના સિદ્ધાંતોના પુરાવા માટે માગ્યું નથી. ત્રિજામાં એટલુંજ માગી લીધું છે કે એક આપેલી લીટીના એક છેડાને મધ્યબિંદુ ધારીને અને તે લીટીને ત્રિજ્યા ધારીને એક વર્તુલ દોરી શકાય. આ આકૃતિ બનાવવા સારૂ એક **કમ્પાસ** (કર્કટ) ની જરૂર છે. પહેલાં કમ્પાસનું એક અણી મધ્યબિંદુ ઉપર મૂકીને અચલ રાખવું, પછી બીજું અણી આપેલી લીટીને બીજે છેડે મૂકીને તે અણી ફેરવવું; તે અણી ફરીને પાછું અસલ જગ્યાએ આવશે કે બરાબર વર્તુલાકૃતિ થઇ રહેશે, યાદ રાખવું કે યુક્લિડ એમ માગ્યું નથી કે ત્રિજ્યા અમુક લંબાઇ (પાંચ ઇંચ, દશ ઇંચ) ની હોવી જોઇએ; પણ એટલુંજ કે એક આપેલી લીટીનો અમે તે એક છેડો મધ્ય બિંદુ માટે લેવો; અને તેજ લીટીની લંબાઇ તે ત્રિજ્યા. યાદ રાખવું કે સાદી આંકણીથી પણ કોઇ અમુક લંબાઇ જેટલી લીટી દોરી શકાય અને સાધારણ કમ્પાસથી પણ કોઇ અમુક ત્રિજ્યાનો વર્તુલ દોરી શકાય, પણ તેવી રીને એ સાધનો વાપરવાની જરૂર નથી, કારણ કે તેટલું કાંઇ યુક્લિડે પુરાવા માટે માગ્યું નથી.

(૩) જે ત્રણ કૃત્યો સ્વીકારાયાંછે તે ઉપરાંત બીજાં પણ એક બે એવાં કૃત્યો સ્વીકૃત હોય એમ યુક્લિડે ગણ્યાં છે. તે એણે આ ભેગાં લખ્યાં નથી તેનાં બે કારણો હશે; એક તો એ કે તે

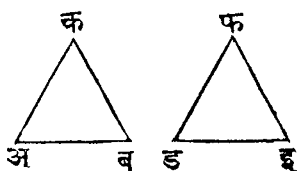
ક્વચિતજ વપરાય છે; બીજું એ કે તે એટલાં સ્પષ્ટ છે કે તે માગી લેવાની જરૂર જણાઇ નહિ હોય. પણ તેવાં કોઇ ઠેકાણે આવે ત્યારે ગુંચવણુ પડે નહિ અને વળી તે શું છે તે આગળથી જણાય, માટે તે અહિયાં આપ્યાં છે. તે સમજવાં સહેલ છે.

૧. કોઈપણ સફાઇમાં એક બિંદુ ગમે ત્યાં લેવું હોય તો લઇ શકાય.

૨. બે લીટીઓ હોય તો તેમાંની એક લીટી ઊંચકીને બીજી લીટી ઉપર એવી રીતે મૂકી શકાય કે એક લીટીનો એક છેડો બીજી લીટીના એક છેડા સાથે મળી જાય, અને ઊંચકેલી લીટી બીજી લીટીના ઉપર એવી રીતે પડે કે તેને ઢાંકી નાખે.

૩. એક ખૂણો ઊંચકીને બીજા ઉપર એવી રીતે મૂકી શકાય કે એકનું શિરોબિંદુ બીજાના શિરોબિંદુ ઉપર પડે અને ઊંચકેલા ખૂણાની એક બાજુ પડેલા ખૂણાની એક બાજૂને ઢાંકી નાખે.

એક આકૃતિને ઊંચકીને બીજી ઉપર એવી રીતે મૂકી શકાય કે એકનું એક બિંદુ બીજીના એક બિંદુ ઉપર પડે અને એ બન્ને બિંદુઓમાંથી નિકળતી લીટીઓ એકેકના ઉપર પડે.



જેમકે **अबक** અને **डइफ** બે ત્રિકોણ છે; તેમાં **अबक** ને ઊંચકીને **डइफ** ઉપર એવી રીતે મૂકો કે **अ** બિંદુ **ड** ઉપર પડે, અને **अब** લીટી **डइ** લીટી ઉપર પડે. (પહેલા સ્કંધના ચોથા સિદ્ધાંતમાં આ કૃત્ય વાપરેલું છે.)

——:o:——

પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો.

૧. જે પરિમિતો એકજ પરિમિતની બરોબર છે, તેઓ અરસ્પરસ બરોબર છે.

૨. જો સમપરિમિતોની સાથે સમપરિમિતો મેળવિયે, તો સર્વાળા સમ થશે.

૩. જો સમપરિમિતોમાંથી સમપરિમિતો બાદ કરિયે તો બાકી સમ રહેશે.

૪. જો વિષમ પરિમિતોની સાથે સમપરિમિતો મેળવિયે તો સર્વાળા વિષમ થશે.

૫. જો વિષમ પરિમિતોમાંથી સમપરિમિતો બાદ કરિયે તો બાકી વિષમ રહેશે.

૬. એકજ અથવા બરોબર પરિમિતોની બમણાઈ બરોબર છે.

૭. એકજ અથવા બરોબર પરિમિતોના અર્ધા બરોબર છે.

૮. જે પરિમિતો એકેક ઉપર મૂકતાં અરસ્પરસ મળી જાય છે અથવા અવકાશમાં એકજ જગ્યામાં બરોબર માઇ રહે છે તેઓ બરોબર છે.

૯. આખું તેના ભાગ કરતાં મ્હોટું છે.

૧૦. બે સીધી લીટીઓ અવકાશ ઘેરી શકતી નથી.

૧૧. સઘળા કાટખૂણા બરાબર છે.

૧૨. જો એક સીધી લીટી બે બીજી સીધી લીટીઓને એવી રીતે મળે કે તેની એક બાજૂના બે માંહેલા ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો થાય તો જે

બાજૂભણી બે કાટખૂણા કરતાં ઓછા સર્વાળાવાળા ખૂણા છે તે બાજૂભણી એ બે લીટીઓને વધાર્યા કરી હોય તો તેઓ મળશે.

સમજણ.

આપણે ઉપર સ્વીકૃત કૃત્યોની સમજણમાં કહી ગયા છિયે કે યુકિલડે સિદ્ધાંતોની સાબિતીમાં પુરાવાના કઠિન નિયમોને એવા દૃઢપણે સ્વીકારેલા છે કે આગલા સિદ્ધાંતમાં ખાત્રીપૂર્વક સાબિત ન થઇ હોય એવી કોઇ પણ હકીકત ત્યાર પછીના સિદ્ધાંતમાં સ્વીકારવામાં આવતી નથી. હવે કેટલાંક પ્રમાણો એવાં દેખીતી રીતે સત્ય છે કે તેમની સત્યતા સાબિત કરવા માટે વધારે સહેલાં પ્રમાણો મળી શકતાં નથી; જેમકે અનું વજન बના વજન બરોબર છે; અને कનું વજન પણ बની બરોબર છે; તેા અનું વજન कની બરોબર થશે. આ પ્રમાણ પ્રત્યક્ષ એટલે વગર સાબિતીએ ખરૂંજ છે, એમાં કાંઇ શક નથી. માટે “પ્રત્યક્ષપ્રમાણ” નો અર્થ તો આ ઉદાહરણ ઉપરથી સમજાયો હશે.

ભૂમિતિવિદ્યાનો આધાર થોડાંક આવાં પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો જેની સત્યતા દેખીતીજ છે તેના ઉપર રહેલો છે.

પ્રત્યક્ષ પ્રમાણમાં તર્કશાસ્ત્રના નિયમો પ્રમાણે નિચેનાં ત્રણ લક્ષણો આવશ્યક હોવાં જોઇએ.

(૧) તેની સત્યતા દેખીતીજ હોવી જોઇએ.

(૨) તેની સત્યતાનો આધાર તેના કરતાં કોઇ વધારે સહેલી સત્યતા ઉપર રહેલો જોઇએ નહિ.

(૩) બીજી પ્રતિજ્ઞાઓની સત્યતાનો પુરાવો તેનાથી મળી શકે.

આ ઉપરથી પ્રત્યક્ષ પ્રમાણની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે આપી શકાય.

પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ એક દેખીતી સત્યતા છે જે સિદ્ધતાથી સ્થાપન થઇ શકતી નથી અને જેને તેમ સ્થાપવાની જરૂર પણ નથી અને જેમાંથી બીજી પ્રતિજ્ઞાઓની સત્યતા સ્થપાય છે.

ઉપર આપેલાં બાર પ્રત્યક્ષ પ્રમાણોના બે ભાગ એવી રીતે થઈ શકે છે કે, (૧) કેટલાંક સાધારણ એટલે જૂદી જૂદી વિદ્યાઓમાં સામાન્ય રીતે લાગુ પડી શકેછે, અને (૨) બાકીનાં ખાસ ભૂમિતિનાં પરિમિતોનેજ લાગુ પડી શકે છે. પહેલાં સાત તથા નવમું સાધારણ રીતે હમેશાં ખરાંજ છે; એક આખી વસ્તુ તેના એક ભાગ કરતાં મ્હોટી હોવીજ જોઇએ. બે વસ્તુઓ એકજ વસ્તુથી બમણી હોય તો તેઓ બરોબર હોવી જોઇએ; ઇત્યાદિ. બાકીનાં પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો ભૂમિતિનાં પરિમિતોનેજ લાગુ પડી શકે છે.

બધાં પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો તપાસી જોવાથી જણાશે કે ઘણાંખરાં તુરતજ સમજી શકાય અને જેની સત્યતા નિઃસંશય છે એવાં છે; પણ મુખ્ય કરી છેલ્લું એવા પ્રકારનું છે કે તેની સમજ તુરત પડી શકતી નથી. આ ઉપરથી એમ નહિ ધારવું કે એ પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ નથી; કારણ કે એમાં શું કહેલું છે તે બરોબર જાણીને બે લીટીઓ દોરશો તો સ્પષ્ટ રીતે તે બે લીટીઓ મળવીજ જોઇએ, એ હવેની ટીકાઓ વાંચવાથી જણાશે. પણ યાદ રાખવું કે ઉપર કહેલાં પહેલા વર્ગનાં સાધારણ પ્ર૦ પ્ર૦ સામાન્ય રીતે ખરાં છે, તોપણ ભૂમિતિમાં તો એ પ્રમાણે લીટી, સપાટી, અવકાશ, વગેરેનેજ લાગુ પડે છે. બે ચોપડીઓ એકેકની બરોબર તો વજન, કિંમત, રંગ વગેરે અનેક

પ્રકારે હોઇ શકે, પણ ભૂમિતિમાં તો એમજ સમજવું કે "તેઓ અવકાશમાં એક સરખી જગા ઘેરે છે."

ટીપ:—પહેલા પ્રત્યક્ષપ્રમાણ ઉપરથી નીચેના ઉપસિદ્ધાંતો નિકળે છે:—

(૧) જો अ પદાર્થ ब ની બરોબર હોય, અને क, ड ની બ-રોબર હોય, અને જો अ અને क બરોબર હોય તો ब અને ड બરોબર થશે.

(૨) જો કેટલાક પદાર્થો અનુક્રમે હોય તેમાં પહેલો બીજા બરોબર, બીજો ત્રીજા બરોબર, ઇત્યાદિ તો તેમાંના કોઈપણ બે પદાર્થો એકેકની બરોબર થશે.

(૩) જો બે પદાર્થો બરોબર હોય, પણ તેમાંનો એક કોઇ ત્રીજા કરતાં મ્હોટો હોય તો તેમાંનો બીજો પણ તે ત્રીજા કરતાં મ્હોટો થશે.

છઠ્ઠામાં બે ભાગ છે; એકજ પદાર્થનાં બમણાં સરખાં હોવાં જોઇએ, તેમજ બે સરખા પદાર્થનાં બમણાં પણ સરખાંજ.' એ પ્ર૦ પ્ર૦ બીજા પ્રમાણમાંથી પણ સહજ સિદ્ધ થઇ શકે છે.

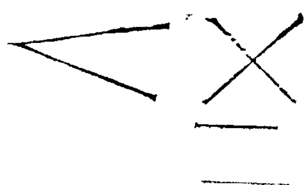
સાતમાને પણ છઠ્ઠાની માફકજ સમજવું.

આઠમા પ્ર૦ પ્ર૦ ની સમજણ બરોબર પકડી જોઇએ. (૧) ઉપર સ્વીકૃત કૃત્યોની સમજણમાં આપણે કહ્યું છે તેમ જો એક લીટી ઊંચકીને બીજી લીટી ઉપર એવી રીતે મૂકિયે કે એકનો એક છેડો (બિંદુ) બીજીના એક છેડા ઉપર પડે, અને તે લીટીઓની દિશા પણ સરખીજ હોય, અને જો તેમ કરતાં એવું બને કે બીજો છેડો પણ બીજા છેડા સાથેજ બરોબર મળી જાય તો સ્પષ્ટ છે કે તે બે લીટીઓ સરખીજ હોવી જોઇએ; (૨) તેમજ જો એક ખૂણો બીજા ખૂણા ઉપર

એવી રીતે મૂકિયે કે એકનું શિરોબિંદુ બીજાના શિરોબિંદુ ઉપર પડે, અને બન્નેની અકેકી બાજૂ એકેકના ઉપર એ-કજ દિશાએ પડે, અને જો તેમ કરતાં તે ઉપરાંત એવું બને કે બાકી રહેલી બે બાજૂમાંથી પણ એક બીજીને ઢાંકી નાખે તો સ્પષ્ટ છે કે તે બે ખૂણા સરખાજ હોવા જોઇએ; (યાદ રાખવું કે દરેક બબ્બે બાજૂઓની માત્ર દિશા એકજ હોવી જોઇએ; તેમની લંબાઇ સરખી હોવી જરૂરની નથી,) (૩) તેમજ એક આકૃતિ ઉંચકીને બીજી ઉપર એવી રીતે મૂકી શકિયે કે એક આકૃતિની બધી બાજૂઓ બીજીની બધી બાજૂઓને બરોબર ઢાંકી નાખે તો સ્પષ્ટ છે કે બધી બાજૂઓ અને તેમની વચ્ચેના બધા ખૂણાઓ સરખાજ હોવા જોઇએ; અને એક આકૃતિ પણ બીજીની બરોબરજ હોવી જોઇએ.



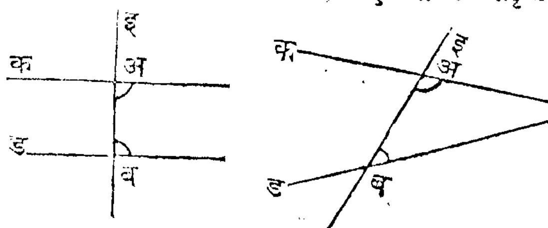
દશમા પ્ર૦ પ્ર૦ વિષે થો-ડો વિચાર જરૂરનો છે. આ-કૃતિમાંની બે લીટીઓથી અવકાશ (જગ્યા) ઘેરાય છે; પણ તે કાંઈ સીધી લીટીઓ નથી; એમાં ब લીટી વકરેલી છે; જો બન્ને લીટીઓ આ પ્રમાણે સીધીજ દોરીશું તો હદ થયલી આકૃતિ અથવા સફાઇ થનાર નથી.



અગીઆરમું પ્ર૦ પ્ર૦ સમજવા માટે, ગમે તે બે કાટખૂણા લઇને સ્થાનોપરી કરી જોવાથી સરખાજ છે એમ ખાત્રી થશે.

બારમું પ્ર૦ પ્ર૦ બરોબર સમજવું આરંભમાં કઠિન છે; અને

પહેલા સ્કંધનો ૨૮ મો સિદ્ધાંત જાણ્યા પહેલાં એની બરોબર સમજણ મળવી મુસ્કેલ છે; પણ આ બે આકૃતિઓ



ઉપરથી જરૂર જેટલી સમજણ તુરત મળી શકશે. પહેલી આકૃતિમાં **क** અને **ड** લીટીઓ ઉપર **इ** લીટી ઉભી પડેછે, અને તેથી **अ** અને **ब** ખૂણો દરેક દેખીતી રીતે એક કાટ-ખૂણો છે; માટે તે બે મળીને બે કાટખૂણા થયા. એ આકૃતિમાં **क** અને **ड** લીટી સમાન્તર લાગે છે. (યાદ રાખવું કે એનો એક સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરવાનો છે; અને તે આગળ જતાં સિદ્ધ થશે; માત્ર પ્રમાણ કેવું છે તેનો વિચાર આપવાનાજ હેતુથી આ આકૃતિઓ દોરી છે.) હવે બીજી આકૃતિમાં **अ** અને **ब** ખૂણા મળીને બે કાટ ખૂણા કરતાં (પહેલી આકૃતિ સાથે સરખાવતાં) ઓછા દેખાય છે; તો **क** અને **ड** લીટીની સમાન્તરતા પણ નિકળી ગયલી તુરત દેખાય છે; એ બે લીટીઓ તો જે બાજૂએ **अ** અને **ब** ખૂણા આવ્યા તે બાજૂએ લંબાવીશું તો મળવાનીજ.

પ્રાસ્તાવિક પ્રકરણ.

એકજ સફાઇ ઉપર જે લીટીઓ અને આકૃતિઓ દોરી શકાય તેમનાં લક્ષણોનું વર્ણન યુકિલડની ભૂમિતિમાં કીધું છે. પહેલા છ સ્કંધોમાં માત્ર સીધી લીટી, અને સીધી લીટી આકૃતિઓ, અને વર્તુલને લગતુંજ વર્ણન છે.

વ્યાખ્યા, સ્વીકૃત કૃત્યો અને પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો શું તે તો આપણે જોયું. ફરીથી યાદ લાવવા સારૂ કહેવું જોઇએ કે જે પારિભાષિક શબ્દો ભૂમિતિમાં વાપરવામાં આવ્યા હોય તે શબ્દોનો ખરો અર્થ બતાવવો તે તે શબ્દની **વ્યાખ્યા.** સિદ્ધાંતો સાબિત કરવા માટે ત્રણ સહેલાં કૃત્યો કરવાની જરૂર છે. જે વિના તેની સાબિતી થઇ શકે નહી, અને જે પહેલાથી માગી લીધેલાં છે તે ત્રણ કૃત્યો સ્વીકૃત કહેવાય છે. કેટલાંક પ્રમાણો એટલાં દેખીતાં છે કે તેમને વધારે સહેલાં પ્રમાણોથી સાબિત કરવાં અશક્ય છે; તેવાં પ્રમાણોને **પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો** કહેવાં. આ પ્રમાણે ભૂમિતિની ભાષાના ખાસ શબ્દોનો અર્થ સમજ્યા પછી, અને ત્રણ સ્વીકૃત કૃત્યો અને બાર પ્રત્યક્ષ પ્રમાણોનો આધાર લઇને, સિદ્ધાંતો સિદ્ધ કરવાને આપણે તૈયાર છિયે.

ઉપર કહેલા, લીટી, આકૃતિ વગેરેના ગુણો યુકિલડ કેટલાક સિદ્ધાંતોથી સાબિત કરી આપે છે; તે એવી રીતે કે એક સિદ્ધાંતમાં ખાત્રીથી સાબિત કરી ગયા તેને ત્યાર પછીના હરકોઇ સિદ્ધાંતમાં ખરૂં છે એમ માનવું; ને આગળ વધવું અને નવા નવા સિદ્ધાંતો શોધતા અને સાબિત કરતા જવું. આવી રીતે તર્ક કીધાથી જે પરિણામો નિકળે તેને સિદ્ધાંત કહેછે. દરેક સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરવા પહેલાં તેમાં શું સિદ્ધ કરવું છે અથવા શું કાર્ય કરવું છે તે આપણી સામે પહેલાં નિશ્ચિત અને સાફ

શબ્દોમાં મૂકવું જોઇએ; એ પ્રમાણે સિદ્ધાંતને મથાળે પહેલે તેની પ્રતિજ્ઞા આવે છે. ભૂમિતિની પ્રતિજ્ઞાઓ બે પ્રકારની છે; (૧) **કૃત્યો** અને (૨) **પ્રમેયો**. કોઇ વેળાએ પ્રતિજ્ઞામાં કાંઇ **કરવાનું** કહેલું છે; જેમકે, એક આપેલી લીટી ઉપર એક સમબાજૂ ત્રિકોણ દોરવાનો; અથવા એક ત્રિકોણ એવો બનાવવો કે તેની ત્રણ બાજૂઓ ત્રણ આપેલી સીધી લીટીઓની બરાબર હોય; ઇત્યાદિ. આવા સિદ્ધાંતને **કૃત્ય** કહે છે. એથી ઉલટું કોઇ વેળાએ કાંઇ તત્ત્વની સત્યતા બતાવવાની હોય છે; જેમકે, એવું સાબિત કરો કે કોઇ પણ ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા જેટલાજ થશે; અથવા એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજૂઓ સરખી હોય તો તેના ત્રણે ખૂણા પણ સરખાજ હોવા જોઇએ; ઇત્યાદિ. આવા પ્રકારના સિદ્ધાંતને **પ્રમેય** કહે છે. હવે એ બન્ને પ્રકારના સિદ્ધાંતો સિદ્ધ કરવા માટે પહેલાં તો પ્રતિજ્ઞા લખીને તે પ્રમાણે એક આકૃતિ દોરીને શું **આપેલું** છે અને શું **માગેલું** અથવા **કરવાનું** છે તે કહેવું જોઇએ. ત્યાર પછી માગેલું પરિણામ ખરેખર મળે છે કે નહિ તે તપાસવાને આકૃતિ સંપૂર્ણ કરવી, એટલે જરૂર પ્રમાણે લીટીઓ લંબાવવી, અથવા બિંદુઓ સાંધવાં; અથવા વર્તુળો દોરવા, વગેરે કૃત્યો કરવાં તેનું નામ **રચના**; ત્યાર પછી જે માગ્યું હોય તે બતાવવાનું અથવા તેની સત્યતા આગલા સિદ્ધાંતોની મદદ વગેરેથી બતાવી આપવાનું કામ રહ્યું, તેને **સિદ્ધતા** કહેછે. સિદ્ધાંતોને અનુક્રમે નંબરો હોય છે. માટે હવે સિદ્ધાંતની ગોઠવણ કેવી હોયછે તેનો વિચાર આવી શકશે.

(૧) સિદ્ધાંત (નમ્બર). (૨) કૃત્ય કે પ્રમેય.

(૩) પ્રતિજ્ઞા.

(૪) પ્રતિજ્ઞા પ્રમાણે આકૃતિ.

(૫) રચના.

(૬) શું સિદ્ધ કરવું છે તે પ્રસિદ્ધ કરવું.

(૭) સિદ્ધતા અથવા પુરાવો.

(૮) સિદ્ધતા ઉપરથી શું સાબિત થયું તે.

એ પ્રમાણે ૮ ભાગ થયા. દરેક સિદ્ધાંતમાં એ આઠ ભાગ જૂદા લખવા જોઇએ; પણ તેમ કરતાં લંબાણ થઇ જવાને લીધે (૪), (૬) અને (૮) અવશ્ય પુરાવામાં તો આવેછેજ, પણ તેમનાં જૂદાં મથાળાં લખાતાં નથી. તે શિવાયનાં મથાળાં બધી સિદ્ધતાઓમાં લખવાં જરૂરનાં છે. એક કૃત્ય અથવા પ્રમેય પૂરૂં થયું કે તેની નીચે "આજ કૃત્ય કરવાનું હતું" અથવા "આજ પ્રમેય સિદ્ધ કરવાનું હતું" એવા શબ્દો લખવાનો ધારો છે. માટે આ વાક્યોનાં સંસ્કૃત ભાષાંતરો સંક્ષેપમાં લખવાં. પહેલાને માટે **कृत्यं कृतं** સંક્ષેપમાં (**कृ. कृ.**) અને બીજાને માટે **प्रमेयं सिद्धं** (સંક્ષેપમાં **प्र. सि.**)

ઘણી વેળાએ સિદ્ધાંતની પ્રતિજ્ઞામાં જે બાબત આપેલી અથવા સ્વીકારેલીજ હોય તે પુરાવા માટે વાપરવી પડે છે; ત્યારે તે બાબત લખીને તેની પાસે કૌંસમાં (પ્રતિ૦) લખવામાં આવે છે; તેનો અર્થ એમ કે એ વાત તો પ્રતિજ્ઞામાં કબુલ કીધેલી છેજ.

તેજ પ્રમાણે કોઈ પણ સિદ્ધાંતની સાબિતીમાં જે જે આ- પણે આગળ શીખી ગયા તેનો **આધાર** લેવાની હરકત નથી. પણ તે આધાર શાથી મળ્યો તે ટુંકામાં ખાત્રીને માટે પાસે લખવો જરૂરનો છે. જેમકે રચના કરતાં બે બિંદુઓ સાંધ્યાં

તો તુરત તેની પાસે (સ્વી. ૧) લખવું; એટલે તેથી સમજાયું કે આ કૃત્ય આપણે પહેલા નમ્બરના સ્વીકૃત કૃત્યને આધારે કીધું. એજ પ્રમાણે વળી એક સિદ્ધાંતમાં તેની આગળના સિદ્ધાંતનો આધાર લીધો હોય તો તે પણ એમજ લખાય છે. ધારો કે ત્રીજા સ્કંધના ૩૧ મા સિદ્ધાંતમાં પહેલા સ્કંધની ૧૫ મી વ્યાખ્યાની જરૂર પડી; તો તે (૧. વ્યા. ૧૫) કરી લખવું; અને ત્રીજા સ્કંધના ૨૨ મા સિદ્ધાંતનો આધાર લીધો તો (૩. ૨૨) કરી લખવું. એ વગેરે માટે નીચે આપેલા સંક્ષેપ ધ્યાનમાં રાખવાઃ—

(૧. વ્યા. ૫) એટલે પહેલા સ્કંધની પાંચમી વ્યાખ્યા.

(સ્વી. ૩) એટલે ત્રીજું સ્વીકૃત કૃત્ય (એ કૃત્યો માત્ર પહેલાજ સ્કંધમાં છે.)

(પ્ર. પ્ર. ૭) એટલે સાતમા પ્રત્યક્ષ પ્રમાણથી; (એ પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો માત્ર પહેલાજ સ્કંધમાં છે.)

(૧. ૫) એટલે પહેલા સ્કંધના પાંચમા સિદ્ધાંત પ્રમાણે.

(૨. ૭) ,, બીજા ,, સાતમા ,, ,,

(પ્રતિ.) ,, જે સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરવો છે તેજ સિદ્ધાંતની પ્રતિજ્ઞાને આધારે.

(રચ.) એટલે તેજ સિદ્ધાંતની રચના કીધી છે તેને આધારે.

ઉપલા સંક્ષેપો દરેક સિદ્ધાંતમાં વપરાય છે; તે ઉપરાંત નીચેના સંક્ષેપો પણ કોઇ વેળા વપરાય છે.

$\because$ કારણ કે, $\therefore$ માટે.

$=$ બરોબર, < ખૂણો, $\perp$ કાટખૂણો,

Δ ત્રિકોણ. $\parallel$ અથવા, $=$ સમાન્તર સીધી લીટીઓ.

| લંબ, ○ વર્તુલ, સી૰ લી૰ સીધી લીટી, ચો૰ ચોરસ.

એક સિદ્ધાંત સિદ્ધ થવાથી બીજી કોઇ સત્યતા તુરતજ તે ઉપરથી ઉત્પન્ન થતી હોય, તો તેની આધાર રાખતી સત્યતાને **ઉપસિદ્ધાંત** કહે છે. એવા ઉપસિદ્ધાંતો કોઇ વખતે તેગની પછીના સિદ્ધાંતોમાં પુરાવા એટલે આધાર માટે કામ પણ આવે છે; એવા ઉપસિદ્ધાંતો તેઓના સિદ્ધાંતને છેડે લખવામાં આવે છે અને તેમ લખ્યા હોય તોજ આધાર માટે લેવાય છે; જેમકે (૨. ૪, ઉપ) એટલે "બીજા સ્કંધના ૪ થા સિદ્ધાંતને છેડે આપેલા ઉપસિદ્ધાંતને આધારે" એમ સમજવું.

કોઇ કોઇ સિદ્ધાંતની નીચે સમજણ સહેલ કરવા માટે અથવા અગત્યની સૂચના માટે **ટીપ** આપી છે, તે છોડી ન દેતાં સરખાજ ધ્યાનથી ગ્રહણ કરવી.

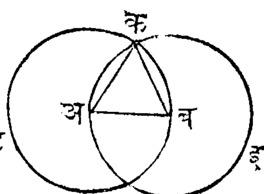
દરેક સિદ્ધાંત નીચે પ્રશ્નો આપ્યા છે, તે બનતાં સુધી સહેલા અને તુરત થાય એવા એવા નવા સિદ્ધાંતો છે; તે તક મળે કરવાથી આ વિદ્યાનું વધારે મજબુત જ્ઞાન સમ્પાદન થશે; અને વિદ્યાર્થીની બુદ્ધિની કસોટી થઇ પડશે એટલુંજ નહિ, પણ જે ચોપડીમાંના સિદ્ધાંતો છે તે વધારે મજબુતીથી મન ઉપર ઠસશે. બનતા સુધી શિક્ષકે એ પ્રશ્નો ઘેરથી ટુંકી રીતે લખી મંગાવવા.

સિદ્ધાંત ૧. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞાઃ–એક આપેલી અન્તવાન સીધી લીટી ઉપર એક સમબાજૂ ત્રિકોણ કહાડવો.

સાધન.

ધારો કે अब આપેલી સીધી લીટી છે; તે अ અને ब બન્ને તરફથી હદ થયલી છે, તેના ઉપર એક સમબાજૂ ત્રિકોણ કહાડવાનો છે.



રચના.

अ મધ્યબિંદુ લઇને અને अब જેટલો અન્તર એટલે ત્રિજ્યા, લઇને એક बकड વર્તુલ દોરો (સ્વી ૩.).

ब મધ્યબિંદુ લઇને અને बअ ત્રિજ્યા લઇને अकइ વર્તુલ દોરો. (સ્વી. ૩).

આ બે વર્તુલો એકેકને બે બિંદુમાં છેદેછે, તેમાંના એક क બિંદુમાંથી, अ અને ब બિંદુઓ સૂધી બે સીધી લીટીઓ कअ અને कब દોરો. (સ્વી. ૧)

ત્યારે अबक માગેલો સમબાજૂ ત્રિકોણ થશે.

સિદ્ધતા.

अ બિંદુ बकडવર્તુલનું મધ્યબિંદુ છે; માટે अकसीधी લીટી अब સીધી લીટીની બરોબર છે. (વ્યા. ૧૫.)

અને વળી अकइ વર્તુલનું મધ્યબિંદુ ब છે,

માટે वक લીટી बअ ની બરોબર છે. (વ્યા. ૧૫).

પણ ઉપર બતાવ્યું છે કે अब તો अकની બરોબર છે;

માટે अक અને बक દરેક अब ની બરોબર છે.

પણ જે પરિમિતો એકજ પરિમિતની બરોબર છે તેઓ અરસ્પરસ બરોબર હોવાં જોઇએ. (પ્ર. પ્ર. ૧).

માટે अक લીટી बक ની બરોબર છે;

માટે कअ, अब અને बक ત્રણે અરસ્પરસ સરખીછે;

એટલે अबक ત્રિકોણ સમબાજૂ છે; અને તે વળી આપેલી લીટી अब ના ઉપર કહાડયો છે. क्रृ. क्रृ.

પ્રશ્નો.

(૧) ઉપલી આકૃતિમાં જે બીજા બિંદુમાં બન્ને વર્તુલો એકેકને છેદે છે તે બિંદુ આપેલી લીટીના છેડા સાથે જોડતાં માગ્યા પ્રમાણેનો એક બીજો ત્રિકોણ થશે.

(૨) ઉપલી સિદ્ધતા સંક્ષેપમાં લખો.

अबक ० નું મધ્યબિંદુ अ છે.

∴ अव=अक (વ્યા. ૧૫).

તેમજ वअ=वक ,,

∴ अव=अक=वक (પ્ર. પ્ર. ૧).

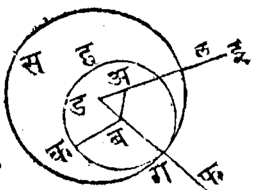
∴ अवक સમબાજૂ Δ अब લીટી ઉપર થયો.

(૩) એક સમર્યાદ સીધી લીટી ઉપર ફક્ત કેટલા સમબાજૂ ત્રિકોણો દોરી શકાય તે આકૃતિ રચના ઉપરથી કહો.

સિદ્ધાંત ૨. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:-એક આપેલા બિંદુમાંથી એક એવી સીધી લીટી દોરવી કે તે એક આપેલી સીધી લીટીની બરોબર થાય.

સાધન.



ધારો કે अ આપેલું બિંદુ છે; અને बक આપેલી લીટી છે; તો अ બિંદુમાંથી એક લીટી बक ની બરાબર દોરવી છે.

રચના.

अ થી ब સુધી अब લીટી દોરો.
(રી. ૧.)

અને अब ઉપર એક સમબાજૂ ત્રિકોણ अबड કહાડો. (૧. ૧.)

डअ અને डब સીધી લીટીઓને ह અને फ સુધી લંબાવો (રી. ૨).

ब મધ્યબિંદુ લઇને, અને बक ત્રિજ્યા લઇને એક વર્તુલ कगह દોરો; (રી. ૩).

ધારો કે તે डफने ग બિંદુમાં છેદે છે. અને ड મધ્યબિંદુ લઇને, डग ત્રિજ્યાએ गसल વર્તુલ દોરો (રી. ૩).

જે अह ને ल બિંદુમાં છેદે છે.

ત્યારે अल લીટી માગ્યા પ્રમાણે बकની બરોબર થશે,

સિદ્ધતા.

ब બિંદુ कगह વર્તુલનું મધ્યબિંદુ છે.

માટે બક લીટી બગ ની બરોબર છે. (વ્યા ૧૫).

અને ડ બિંદુ ગલલ વર્તુલનું મધ્યબિંદુ છે,

માટે ડલ લીટી ડગ ની બરોબર છે. (વ્યા ૧૫).

પણ ડલનો એક ભાગ ડઅ તે ડગના એક ભાગ ડવની બરોબર છે. (૧. ૧).

માટે સરખા ભાગો બાદ કરતાં, બાકીનો ભાગ અલ તે બાકીનો ભાગ બગ ની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૩).

પણ ઉપર બતાવ્યું કે બક પણ બગની બરોબર છે; માટે અલ અને બક દરેક બગ ની બરોબર છે.

પણ જે પરિમિતો એકજ પરિમિતની બરોબર છે તે અરસપરસ બરોબરજ હોવાં જોઇએ,

માટે અલ સીધી લીટી બકની બરોબર છે (પ્ર. પ્ર. ૧). એટલે આપેલા અબિંદુમાંથી અલ લીટી આપેલી સીધી લીટી બકની બરોબર માગ્યા પ્રમાણે દોરાઈ. ક્રૃ. ક્રૃ.

સૂચનાઃ—આકૃતિ બરોબર દોરવા માટે વિદ્યાર્થીએ પહેલાં મ્હોટો વર્તુલ દોરવો; પછી તેમાં નાનો વર્તુલ એવી રીતે દોરવો કે બન્નેનાં નીચેનાં બિંદુઓ અરસપરસ અડકી રહે; ને પછી પછવાડેથી માંહેની લીટીઓ દોરવી; ફક્ત સારી આકૃતિ દોરવા માટે આ સૂચના કીધી છે. રચના લખવી તે તો સિદ્ધાંતમાં કહ્યા પ્રમાણેજ.

ટીપ-(૧) આ સિદ્ધાંતની રચના કઠિન છે; અને એટલી ભારી રચનાવાળા સિદ્ધાંતો પહેલા સ્કંધમાં થોડાજ છે; માટે આકૃતિ બરોબર રચવી જરૂરની છે; તે માટે નીચે લખેલી બાબતો ધ્યાનમાં રાખવીઃ—

(૧) આપેલા બિંદુને આપેલી લીટીના નજદીકના છેડા સાથે સાંધવું.

(૨) પછી એ સાંધનારી લીટી ઉપર એક સમબાજૂ ત્રિકોણ દોરવો.

(૩) પછી તે ત્રિકોણની ઉપલી બે બાજૂઓ દૂર સુધી લંબાવવી.

(૪) પછી આપેલી લીટીના સાંધેલા છેડાને મધ્યબિંદુ લઇને, અને આપેલી લીટીનેજ અન્તર એટલે ત્રિજ્યા ગણીને પહેલો (ન્હાનો) વર્તુલ દોરવો.

(૫) આ વર્તુલ લંબાવેલી બન્ને બાજૂઓને છેદશેજ.

(૬) ત્રિકોણના છેક ઊંચા શિરોબિંદુને મધ્યબિંદુ લઇને ત્યાંથી તે છેક આપેલી લીટીના છેડાની પાર જઇને જે બિંદુમાં પહેલો વર્તુલ લીટીને છેદેછે ત્યાં સુધીની ત્રિજ્યા લઇને મ્હોટો વર્તુલ દોરવો.

(૨) આપેલું બિંદુ આપેલી લીટીના બેમાંથી ગમે તે છેડા સાથે સાંધવું, અને સાંધનારી લીટી ઉપરનો ત્રિકોણ લીટીની ઉપર અથવા હેઠળ ગમે તેમ દોરવો. બધી એટલે ચારે રીતે માગેલી લીટી મળી આવશે. વિદ્યાર્થીએ એ ચારે આકૃતિઓ દોરીને તપાસવી.

(૩) યાદ રાખવું કે જો કમ્પાસવતી લીટીની લંબાઇ ભરવાની છુટ હત તો આ સિદ્ધાંત કરવાની જરૂર નહતી પણ યુક્લિડે તે વાત સ્વીકારી નથી.

પ્રશ્ન.

(૧) એક આપેલા બિંદુમાંથી એક આપેલી અમર્યાદ સીધી લીટીને મળે એવી એક આપેલી લંબાઇની લીટી દોરો.

(૨) આપેલું બિંદુ આપેલી લીટીમાંજ હોય તો ઉપલો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૩) તેમજ આપેલું બિંદુ આપેલી લીટીનો એક છેડો હોય તો.

(૪) એક આપેલી લીટી ઉપર એવો એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કહાડો કે જેની સરખી બાજુઓ એક આપેલી સીધી લીટીની બરોબર હોય.

(૫) એક આપેલી લીટી ઉપર એવો એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કહાડો કે તેની બે સરખી બાજુઓ તેના પાયા કરતાં બેવડી હોય.

(૬) જો अब=बक्ष તો ड બિંદુ ન્હાના વર્તુલના પરિઘ ઉપર પડશે.

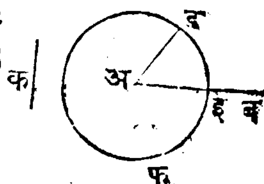
સિદ્ધાંત ૩. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—બે આપેલી સીધી લીટીઓમાંની મ્હોટીમાંથી ન્હાની લીટી બરોબર એક ભાગ કાપવો.

સાધન.

ધારો કે अब અને क બે આપેલી સીધી લીટીઓ છે; જેમાં अब મ્હોટી છે.

अब લીટીમાંથી એક ભાગ क લીટી જેટલો કાપવો છે.



રચના.

अ બિંદુમાંથી એક अड લીટી क લીટીની બરોબર દોરો. (૧. ૨.)

પછી अ મધ્યબિંદુ લઈને, અને अड ત્રિજ્યા લઈને એક વર્તુલ डइफ દોરો; ધારો કે તે વર્તુલ अच લીટીને इ બિંદુમાં છેદે છે.

તો अइ ભાગ માગવા પ્રમાણેનો થશે.

સિદ્ધતા.

डइफ વર્તુલનું अ મધ્યબિંદુ છે;
માટે अइ લીટી अड ની બરાબર છે. (વ્યા. ૧૫.)
પણ अड તો क લીટીની બરાબર છે. (રચના).
માટે अइ અને क દરેક अड ની બરોબર છે.
માટે अइ લીટી क ની બરોબર છે (પ્ર. પ્ર. ૧.)
અને તે આપેલી મ્હોટી લીટીમાંથી આપેલી ન્હાની લીટી બરાબર કાપી. क. क.

પ્રશ્ન.

(૧) બે આપેલી લીટીના સરવાળા બરોબર એક લીટી દોરો.

(૨) બે આપેલી લીટીની બાદબાકી બરોબર એક લીટી દોરો.

(૩) એક ન્હાની આપેલી લીટીને લંબાવીને મ્હોટી આપેલી લીટી બરોબર દોરો.

સિદ્ધાંત ૪ ની સમજણ.

ચોથો સિદ્ધાંત ઘણો અગત્યનો છે; અને એમાં જે પુરાવો વાપરવામાં આવ્યો છે તે નવીન તરેહનો છે; માટે તે વિશે આ ટીપ પહેલાંથી વાંચવાથી ફાયદો થશે.

કોઇ પણ એક ત્રિકોણમાં ૭ પરિમિતો હોય છે; ત્રણ બાજૂ અને ત્રણ ખૂણા; હવે જો બે આપેલા ત્રિકોણોમાં ઘણું કરીને

ઉપલાં છમાંનાં ત્રણ પરિમિતો સરખાં આપ્યાં હોય તો બાકીનાં ત્રણ સરખાં થશે; અને ત્રિકોણ આખા પણ એકેકને સરખા થશે. એવી રીતે બે ત્રિકોણોની સરખાઇ સ્થાપવાને પહેલા સ્કંધનાં ત્રણ સિદ્ધાંતો સિદ્ધ કીધા છે. તેમાંનો પહેલો આ છે, બીજા નમ્બર ૮ અને ૨૬ છે. આ સિદ્ધાંતમાં એમ આપેલું છે કે એક ત્રિકોણની બે બાજૂઓ જૂદી જૂદી બીજા ત્રિકોણની બે બાજૂઓની બરોબર છે; અને ત્રીજું એ કે તે બએ બાજૂઓની વચ્ચે આવેલા ખૂણા પણ બન્ને ત્રિકોણોમાં સરખા છે; તો સિદ્ધ કરવું કે તે ત્રિકોણોનાં બાકીનાં પરિમિતો પણ સરખાંજ થશે; અને બન્ને ત્રિકોણો પણ સરખાજ થશે.

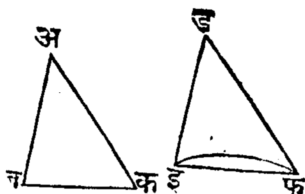
સિદ્ધતા સ્થાનોપરિ કરવાથી થશે. એ વિશે વ્યાખ્યા ૧૦–૧૨ ની સમજણમાં લખ્યું છે તે તથા સ્વીકૃત કૃત્યોની સમજણમાં જે છેલ્લે કહ્યું છે તે બરોબર ધ્યાનમાં લેવું. પુરાવામાં એક ત્રિકોણ ઊંચકીને બીજા ઉપર મૂકીને પછી સિદ્ધ કરે છે કે તે બન્ને એકેક ઉપર બરોબર પડી જાય છે, માટે તેઓ સરખા હોવા જોઇએ.

સિદ્ધાંત ૪. પ્રમેય.

વ્યાખ્યા:–જો એક ત્રિકોણની બે બાજૂઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની બે બાજૂઓની બરોબર હોય, અને વળી તે સરખી બાજૂઓનીવચ્ચે આવેલા અન્તર્ખૂણાઓ પણ બરોબર હોય તો (૧) તે ત્રિકોણોના પાયા એટલે બાકીની બાજૂઓ બરોબર થશે. (૨) બાકી રહેલા ખૂણાઓમાંથી જે ખૂણાઓ સરખી બાજૂઓની સામેના છે તેઓ અરસ્પરસ બરોબર થશે અને (૩) તે ત્રિકોણો પણ એકેકની બરોબર થશે.

સાધન.

ધારેા કે अबक અને डइफ બે આપેલા ત્રિકેાણેા છે; જેમાં अब બાજૂ डइ ની બરેાબર છે, अक બાજૂ डफ ની બરેાબર છે અને અન્તર્ખૂણેા बअक તે इडफ અન્તર્ખૂણાની બરેાબર છે તેા સિદ્ધ કરવાનું કે (૧) बक બાજૂ इफ ની બરેાબર થશે; અને (૨) अब બાજૂની સામેનેા ખૂણેા अबक તે डफ બાજૂની સામેના ખૂણા डइफ ની બરેાબર થશે, અને अब ની સામેનેા ખૂણેા अकब તે डइ ની સામેના ખૂણા डफइ ની બરેાબર થશે, અને (૩) अबक ત્રિકેાણ डइफ ત્રિકેાણની બરેાબર થશે.



સિદ્ધતા.

કારણ કે જો अबक ત્રિકેાણ ઊંચકીને डइफ ત્રિકેાણ ઉપર મૂકિયે એવી રીતે કે अ બિંદુ ड બિંદુ ઉપર પડે અને अब લીટી डइ લીટીની ઉપર હેાય, તેા ब બિંદુ इ બિંદુ ઉપરજ પડવું જોઇએ.

કારણ કે अब લીટી डइ ની બરેાબર છે. (પ્રતિજ્ઞા.)

હવે अब લીટી डइ ઉપર બરેાબર પડી રહે છે તેા अक લીટી डफ ના ઉપર તેજ દિશાએ પડવી જોઇએ;

કારણ કે बअक ખૂણેા इडफ ખૂણાની બરેાબર છે. (પ્ર.)

જો એમ ન પડે તેા તેા अ અને ड ખૂણા ન્હાના મ્હેાટા થાય,

વળી अ બિંદુ ड ઉપર પડે છે અને अक તથા डफ લીટીઓની દિશા એકજ છે, તો क બિંદુ ઉપર પડવુંજ જોઇએ.

કારણ કે अक લીટી डफ ની બરોબર છે. (પ્રતિ.)

આપણે જોયુ કે ब બિંદુ इ ઉપર પડે છે.

અને क બિંદુ फ ઉપર પડે છે.

તો તેમની વચ્ચે આવેલી बक લીટી ઉપર इफ ઉપર પડવીજ જોઇએ; કેમકે જો તેમ ન પડે અને આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે એ ચારમાંના બબે બિંદુઓ મળવા છતાં એકેક ઉપર ન પડે તો તો બે સીધી લીટીઓ અવકાશ ઘેરે; પણ એ તો અશક્ય છે. (પ્ર. પ્ર. ૧૦.)

માટે बक લીટી इफ ના ઉપરજ પડવી જોઇએ અને તેઓના છેડા તો એકજ બિંદુમાં આવી રહેલા છે.

માટે (૧) बक લીટી इफ ની બરોબર છે (પ્ર. પ્ર. ૮)

વળી अबक ત્રિકોણના ब અને क ખૂણા પણ डइफ ત્રિકોણના इ અને फ ખૂણા ઉપરજ પડે છે.

માટે (૨) अबक ખૂણો डइफ ખૂણાની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૮.)

અને अकब ખૂણો डफइ ખૂણાની બરોબર છે.

(૩) વળી આખો अबक ત્રિકોણ डइफ ત્રિકોણ ઉપર બરોબર પડી રહે છે;

માટે, अबक ત્રિકોણ પણ डइफ ત્રિકોણની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૮.)

માટે જો એક ત્રિકોણની બે બાજૂઓ ઈ૦

ટીપઃ—(૧) આ સિદ્ધાંત પ્રમેય છે; પહેલા ત્રણ કૃત્ય હતા. એમાં કાંઈ બનાવવાનું નથી; પણ જો એક ત્રિકોણનાં ત્રણ આપેલાં પરિમિતો બીજાનાં ત્રણની બરોબર હોય તો તે ત્રિકોણો બધી રીતે સરખા થશે એવું સિદ્ધ કરવાનું છે.

(૨) યુકિલડે સ્વીકૃત કૃત્યોમાં સ્થાનોપરિ કરવાનું સ્વીકાર્યું તો નથી માટે ત્રિકોણો એકેક ઉપર મૂકી શકાય એવું કલ્પનાથીજ વિચારવાનું છે, તો પણ શિક્ષક બે ત્રિકોણો કાગળ ઇ૦ ના લઈને એકેક ઉપર શિરોબિંદુ વગેરે મૂકીને બનાવશે તો આ સિદ્ધાંત સહેલથી સમજાશે.

પ્રશ્નો.

(૧) જો **अक=डइ** હોય અને **बक=डफ** હોય, તો કયા ખૂણા સરખા આપેલા હોવા જોઈએ; અને કયા ખૂણા સરખા થશે, તે સિદ્ધ કરો.

(૨) એક ચોરસની કર્ણ ખૂણાઓને તથા ચોરસને દ્વિભાજે છે.

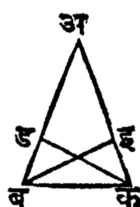
(૩) એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણના શિરોબિંદુને દ્વિભાગનાર લીટી પાયાને મળે તો તે પાયાને દ્વિભાગશે; અને પાયા ઉપર લંબ થશે.

(૪) જો **अबक** ત્રિકોણ સમદ્વિબાજૂ હોય તો ઉપર પ્રમાણેની સિદ્ધતાથી સિદ્ધ કરો કે **ब** અને **क** ખૂણા સરખા થશે.

સિદ્ધાંત ૫ માની સમજણ.

પાંચમો સિદ્ધાંત ઘણું કરીને આરંભ કરનારાઓને કઠિન લાગે છે, માટે આ નિચે આપેલો સિદ્ધાંત જે ચોથાનોજ એક જૂદો આકાર છે તે પહેલો જોવાથી પાંચમો કદાચ વધારે સહેલાઈથી સમજાશે.

એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણ **अबक** ની **अब** અને **अक** સમબાજૂઓમાં **ड** અને **इ** એવાં બિંદુઓ લીધાં છે કે **अड=अइ** છે; અને **बइ** તથા **डक** બિંદુઓ જોડ્યાં, તો **बइ** લીટી **डक** ની બરોબર થશે.



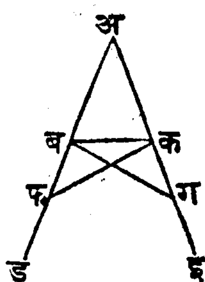
કારણ **अडक** અને **अबइ** ત્રિકોણમાં **अड=अइ** છે; અને **अब=अक** છે. (પ્રતિ.) એકની બે બાજૂઓ **अड** અને **अक** બીજાની બે બાજૂઓ **अइ** અને **अब**ની બરોબર છે; અને તેમ-નો અન્તર્ખૂણો તો એકને એક **अ** છે એટલે સરખોજ છે. ∴ એ બે ત્રિકોણો સરખા થયા; અને **डक** લીટી **बइ** ની બરોબર થઇ.

સિદ્ધાંત ૫. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:-સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણની બરોબર બાજૂની સામેના (એટલે પાયા ઉપરના) ખૂણાઓ બરોબર છે; અને તે સમબાજૂઓને લંબાવિયે તો પાયાની બીજી બાજૂએ ખૂણા થશે તે પણ (એકેકની) બરોબરજ થશે.

સાધન.

ધારો કે अबक એક સમદ્વિ-બાજૂ ત્રિકોણ છે; જેની अब બાજૂ अक બાજૂની બરોબર છે; ધારો કે તે સરખી બાજૂઓ ड અને इ બિંદુઓ સુધી વધારીતો अबक ખૂણો अकब ખૂણાની બ-રોબર થશે; અને कबड ખૂણો बकइ ખૂણાની બરોબર થશે.



રચના.

बह લીટીમાં એક फ બિંદુ લો;

અને આખી अइ લીટીમાંથી એક अग ભાગ, अफ લીટીની બરોબર કાપો. (૧. ૩)

फ, क અને ब, ग બિંદુઓ સાંધો. (સ્વી ૧.)

સિદ્ધતા.

फअक અને गअब ત્રિકોણોમાં,

फअ લીટી गअ ની બરોબર છે, (રચના.)

અને अक લીટી अब ની બરોબર છે, (પ્રતિ.)

માટે એક ત્રિકોણની फअ, अक લીટીઓ બીજા ત્રિકોણની गअ, अब લીટીઓની બરોબર છે,

અને અન્તર્ખૂણા બંને ત્રિકોણમાં સાધારણ છે.

માટે फअक ત્રિકોણ गअब ત્રિકોણની બરોબર છે. (૧. ૪)

એટલે फक લીટી गब ની બરોબર છે.

અને अकफ ખૂણો अबग ખૂણાની બરોબર છે.

અને अफक ખૂણો अगब ખૂણાની બરોબર છે.

વળી, આખી अफ લીટી अग ની બરોબર છે. (રચ.)

તેમાં अब અને अक બરોબર આપેલી છે, (પ્રતિ.)

માટે બાકીનો ભાગ बफ તે બાકીના ભાગ कग ની બરોબર થવો જોઇએ. (સ્વ. પ્ર. ૩).

ત્યારે, बफक, कगब ત્રિકોણોમાં, बफ લીટી कग ની બરોબર છે. (સિદ્ધતા.)

અને ફક લીટી ગઘની બરાબર છે, (સિદ્ધતા).
અને અન્તર્ખૂણા બફક અને કગઘ બરાબર છે,
(સિદ્ધતા).
માટે બફક અને કગઘ ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા છે.
અને ફબક ખૂણો ગકઘ ખૂણા બરાબર છે.
અને બકફ ખૂણો કઘગ ખૂણા બરાબર છે. (૧ ૪.)
પણ ઉપર બતાવ્યું છે કે આખો અબગ
આખા ખૂણા અકફની બરાબર છે:
અને હુમણાં સિદ્ધ કીધું કે તેમના ભાગો કઘગ
અને બકફ સરખા છે.
માટે બાકીનો ખૂણો અબક બાકીના ખૂણા અકઘ
ની બરાબર થયો. (પ. પ. ૩).
અને એ અઘક ત્રિકોણના પાયા ઉપરનાજ ખૂણાછે.
વળી, ઉપર બતાવી ગયાકેફઘક અને ગકઘ ખૂણા
પણ બરાબર છે.
અને તે પાયાની બીજી બાજૂના ખૂણા છે.
માટે આપણે સિદ્ધ કીધું કે એક સમદ્વિબાજૂ
ત્રિકોણમાં ૪૦ પ્ર સિ.

ઉપસિદ્ધાંત:—જો એક ત્રિકોણ સમબાજૂ હોય તો તેના ખૂણા પણ સમ હોવા જોઇએ.

પ્રશ્નો.

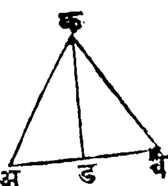
(૧) સમબાજૂ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણા બરાબર છે.
(૨) એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજૂએ બે સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણ અબક અને ડબક છે; જેમાંનો બીજો

(૫) જો સમબાજૂ ત્રિકોણ આકૃતિમાં ન કહાડતાં ફક્ત સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણજ પાયા ઉપર કહાડયો હોય તો આ કૃત્ય સિદ્ધ થાય કે નહિ ?

સિદ્ધાંત. ૧૦ કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:—એક આપેલી અન્તવાન સીધી લીટીને દુભાગવી એટલે તેના બે સરખા ભાગ કરવા.

સાધન.



ધારો કે अब આપેલી સીધી લીટી છે;

તેના બે સરખા ભાગ કરવાના છે.

રચના

अब લીટી ઉપર એક સમબાજૂ ત્રિકોણ अबक દોરો. (૧. ૧)

અને अकब ખૂણાને कड લીટીએ દુભાગો. (૧. ૯)

એ લીટી अब ને ड બિંદુમાં મળે છે.

તો अब લીટીને ड બિંદુ દુભાગશે.

સિદ્ધતા.

अकड અને बकड ત્રિકોણોમાં

अक લીટી बक ની બરોબર છે, (રચના)

અને कड લીટી બન્નેમાં સાધારણ છે,

અને अकड અન્તર્ખૂણો बकड અન્તર્ખૂણાની બરોબર છે. (રચના)

માટે એ ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા છે.

માટે અड પાયો बड ની બરોબર છે.

માટે ड બિંદુમાં આપેલી લાટીના બે સરખા ભાગ થયા. **ક્રૃ. ક્રૃ.**

પ્રશ્ન.

(૧) એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણના શિરોબિંદુના ખૂણાને દુભાગનારી લીટી પાયાને પણ દુભાગશે.

(૨) એક આપેલા પાયા ઉપર એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણ એવો દોરો કે તેની સમબાજૂઓનો સર્વાળો એક આપેલી લીટીની બરોબર થાય.

(૩) એક આપેલી અન્તવાન સીધી લીટીના આઠ સરખા ભાગ કરો.

(૪) આપેલી લીટીના પ્રત્યેક છેડાને મધ્યબિંદુ અને આપેલી લીટીને ત્રિજ્યા ધારીને બે વર્તુલો દોરો; તો જે બે બિંદુઓમાં એ વર્તુલો એકેકને છેદે છે તે તે બિંદુઓ સાંધવાથી આપેલી લીટી દુભાગાશે.

(૫) ઉપલા પ્રશ્નમાં દુભાગનારી લીટી આપેલી લીટીને લંબ છે.

(૬) જે ચતુષ્કોણાકૃતિના કર્ણો એકેકને દુભાગે અને એકેક ઉપર લંબ હોય તે આકૃતિ સમબાજૂ હોવી જોઇએ.

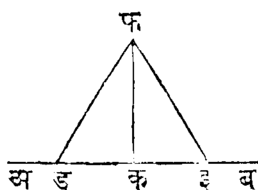
(૭) એક અન્તવાન સીધી લીટીને એવી લંબાવો કે લંબાવેલો ભાગ તે આખી લંબાયલી લીટીનો ત્રિજો ભાગ થાય.

સિદ્ધાંત ૧૧ કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા—એક આપેલી સીધી લીટી ઉપર તે લીટીમાં એક આપેલા બિંદુમાંથી લંબ દોરવી.

સાધન.

ધારો કે अब આપેલી લીટી છે, અને તેમાં क આપેલું બિંદુ છે.



क બિંદુમાંથી એક લીટી अब ઉપર લંબ દોરવાની છે.

રચના.

अक માં એક ड બિંદુ લો; અને कब માંથી कइ લીટી कड બરોબર કાપો. (૧. ૩)

डइ લીટી ઉપર એકસમબાજૂ ત્રિકોણ डफइ દોરો. (૧. ૧)

कफ સાંધો;

ત્યારે कफ લીટી अब ઉપર લંબ થશે.

સિદ્ધતા.

डकफ અને इकफ ત્રિકોણોમાં, डक લીટી इक ની બરોબર છે. (રચના.)

અને कफ બન્નેમાં સાધારણ છે,

અને ત્રિજી બાજૂ डफ ત્રિજી બાજૂ इफ ની બરોબર છે. (રચના.)

માટે डकफ ખૂણો इकफ ખૂણાની બરોબરછે.(૧.૮)

અને વળી તેઓ પાસપાસેના ખૂણા છે,

પણ જ્યારે એક લીટી બીજી ઉપર ઉભી રહીને પાસપાસેના ખૂણા સરખા કરે ત્યારે તે દરેક ખૂણાને કાટખૂણો કહે છે. (વ્યા. ૧૦.)

માટે डकफ અને इकफ દરેક કાટખૂણો છે.

માટે कफ લીટી अब ઉપર લંબછે, અને તે क બિંદુ-માંથી દોરી છે. **क़. क़.**

પ્રશ્ન.

(૧) ઉપલી આકૃતિમાં બતાવો કે **फक** માં અથવા તેને લંબાવીને તેમાં કોઇ પણ બિંદુ લઇએ તો તે **ड** અને **इ** બિંદુઓથી સરખે અન્તરે છે.

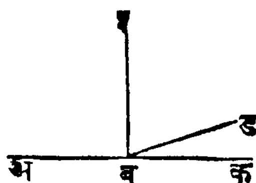
(૨) જો આપેલું બિંદુ લીટીને છેડે હોય તો સિદ્ધાંતમાં કીધેલી રચના ઉપરાંત શી રચના કરવી જોઇએ ?

(૩) એકજ બિંદુમાંથી આવી લંબ કેટલી દોરી શકાય ?

(૪) એક સમબાજૂ ત્રિકોણની બે બાજૂઓ દુભાગીને તે બિંદુઓમાંથી તે બાજૂઓને બે લંબ દોરો; જે બિંદુમાં તે લંબો મળેછે તેને ત્રિકોણના ત્રણે શિરોબિંદુ સાથે સાંધો; તો તે ત્રણ સાંધનારી લીટીઓ સરખી થશે.

(૫) બતાવો કે આ સિદ્ધાંત નવમા સિદ્ધાંતનોજ એક દૃષ્ટાંત છે.

ટીપ:—આ સિદ્ધાંત ઉપરથી એવું અનુમાન **થઈ શકે** છે કે બે સીધી લીટીઓને એક સામાન્ય ખંડ હોઇ **શકે** નહિ.



જો એમ બની શકે તો ધારો કે બે સીધી લીટી **अबक** અને **अबड** ને એક સામાન્ય ખંડ **अब** છે. તો **ब** બિંદુમાંથી **बइ** લીટી **अब** ને લંબ દોરો. (૧. ૧૧)

માટે <**अबइ**=<**कबइ** (વ્યા. ૧૦) કારણ કે **अबक** એકજ લીટી છે. તેમજ <**अबइ**=<**डबइ** (વ્યા. ૧૦.)

કારણકે **अबड** એકજ લીટી છે. ∴ <**कबइ**=<**डबइ** (પ્ર. પ્ર. ૧.)

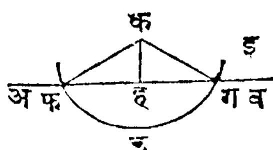
મ્હોટો ખૂણો ન્હાનાની બરોબર, એ અશક્ય છે. માટે બે સીધી લીટીનો એક સામાન્ય ખંડ હોઇ શકે નહિ.

સિદ્ધાંત ૧૨. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞાઃ–એક આપેલી અમર્યાદસીધી લીટી ઉપરતે-ની બહારના એકઆપેલા બિંદુમાંથી એક લંબ દોરવી.

સાધન.

ધારો કે अब એક એવી સીધી લીટી છે કે બન્ને બાજૂએ લંબાવી શકાય; અને क તેની બહાર આપેલું બિંદુ છે. તો क બિંદુમાંથી એક લીટી अब ને લંબ દોરવી છે.



રચના.

આપેલી લીટીની બીજી બાજૂએ એક ड બિંદુ લો; क મધ્ય બિંદુ અને कड ત્રિજ્યા લઇને એક વર્તુલ फगइ દોરો (સ્વી. ૩)

અને ધારો કે તે આપેલી લીટીને फ અને ग બિં-દુમાં છેદે છે.

फग ને ह બિંદુમાં દુભાગો; (૧. ૧૦)

कह સાંધો;

તો कह લીટી अब ઉપર લંબ થશે.

कफ અને कग સાંધો.

फहक અને गहक ત્રિકોણોમાં,

फह લીટી गह ની બરોબર છે; (રચ.)

અને हक બન્નેમાં સાધારણ છે;

અને ત્રિજી બાજૂ कफ ત્રિજી બાજૂ कगની બરો-બર છે (વ્યા. ૧૫.)

કારણ કે એકજ વર્તુલની ત્રિજ્યાઓ છે;

માટે कहफ ખૂણો कहग ખૂણાની બરોબર છે. (૧.૮)

અને તે ખૂણા પાસપાસેના છે;

પણ જ્યારે એક લીટી બીજી ઉપર ઉભી રહીને પાસપાસેના ખૂણા એકેકની બરોબર કરેછે, ત્યારે દરેક ખૂણો કાટખૂણો હોવો જોઇએ, માટે ह આગળના બન્ને ખૂણા કાટખૂણા છે. માટે આપેલા क બિંદુમાંથી, कह લીટી अब ને લંબ દોરી. कृ. कृ.

ટીપઃ—આપેલી લીટી અમર્યાદ હોવી જોઇએ; કે જે વર્તુલ દોરાય તેને બે બિંદુઓમાં છેદવા માટે દરેક બાજૂએ તે લીટી લંબાવી શકાય.

પ્રશ્ન.

(૧) એક ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી સામેની બાજૂ ઉપર દોરેલી લંબ તે બાજૂને દ્વિભાગે, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજૂ હોવો જોઇએ.

(૨) એક ત્રિકોણના દરેક શિરોબિંદુમાંથી સામેની બાજૂઓ ઉપર દોરેલી લંબ તે બાજૂઓને દ્વિભાગે તો તે ત્રિકોણ સમબાજૂ હોવો જોઇએ.

(૩) એક સમબાજૂ ત્રિકોણના શિરોબિંદુ અને સામેની બાજૂના મધ્યબિંદુ સાંધનારી લીટીઓ સમ હોવી જોઇએ.

(૪) એક અમર્યાદ લીટી અને તેની બહારના એક બિંદુ વચ્ચેનો અન્તર કેમ કહાડવો ?

પરચુરણ પ્રશ્નો (સિદ્ધાંત ૧–૧૨.)

૧ એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણના પાયામાં બે બિંદુઓ બન્ને છેડેથી સમાન્તર આપ્યાં છે; તો બતાવો કે તે બિંદુઓ તે ત્રિકોણના માથાના શિરોબિંદુથી પણ સરખેજ અન્તરે છે.

૨. એક ચતુષ્કોણાકૃતિની સામસામેની બાજૂઓ બરોબર હોય તો સામસામેના ખૂણા પણ બરોબરજ થશે.

૩. **अबक** એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણ છે, જેમાં **अब=अक**; **ब** અને **क** ખૂણાને બે લીટીઓ દુભાગે છે; અને તે લીટીએ **ड** બિંદુમાં મળે છે; તો **डअ** લીટી **बअक** ખૂણાને દુભાગશે.

૪. એક સમબાજૂ ત્રિકોણની દરેક બાજૂને દુભાગીને તે ત્રણ બિંદુઓને સાંધતાં જે ત્રિકોણ થાય તે પણ સમબા-જૂજ થશે.

૫ એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણ **अबक** ની **अब** અને **अक** સરખી બાજૂઓ **अ** ખૂણાની પાર વધારી, અને તેમાં બે બિંદુઓ એવાં લીધાં કે **अइ=अफ**; **फब** અને **फक** બિંદુઓ સાંધ્યાં; તો **फब=इक** થશે.

૬. એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણ **अबक** ની **अब** અને **अक** સરખી બાજૂઓમાં બે બિંદુઓ **क्ष** અને **य** એવાં લીધાં કે **अक्ष=अय**; અને **कक्ष** અને **बय** સાંધ્યાં, તો **ड** બિંદુમાં એકેકને છેદે છે; તો

(૧) **बडक** ત્રિકોણ સમદ્વિબાજૂ થશે.

(૨) **अड** લીટી **बअक** ખૂણાને દુભાગશે;

(૩) અને **अड** લંબાવીશું, તો **बक** ને દુભાગશે અને તે ઉપર લંબ થશે.

૭. એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણનો પાયો અને માથાના શિરો બિંદુ ઉપરથી પાયા ઉપર દોરેલી લંબ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ બનાવો.

૮. એક આપેલી સીધી લીટીમાં એક એવું બિંદુ શોધી કહાડો કે તે લીટીની એકજ બાજૂએ આપેલાં બે બિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય.

૯. ઉપલાજ પ્રશ્નમાં આપેલાં બિંદુઓ લીટીની જૂદી જૂદી બાજૂએ લો.

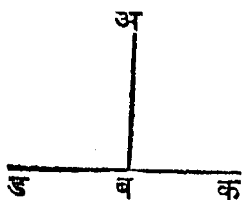
૧૦. **अबक** ત્રિકોણમાં **अयक** ખૂણો સાંકડો ખૂણો છે; તો **घअ** માં અથવા તેને લંબાવતાં જે લીટી થાય તેમાં એક **ड** બિંદુ એવું શોધી કહાડો કે **बड=कड.**

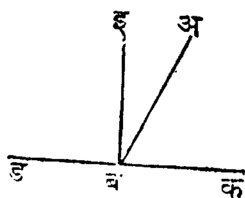
સિદ્ધાંત ૧૩. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—જો એક સીધી લીટી બીજી સીધી લીટી ઉપર પડીને તેની સાથે ખૂણા કરે, તો તે બે ખૂણા કાટખૂણા હોવા જોઇએ, અથવા તે બે ખૂણા મળીને બે કાટખૂણાની બરોબર હોવા જોઇએ.

સાધન.

ધારોકે अब સીધી લીટીकडસીધી લીટી ઉપર પડેછે;





તો પાસપાસેના ખૂણા डबअ, अबक બે કાટખૂણા થશે; અથવા તે બેખૂણા મળીને બે કાટખૂણાની બરોબર થશે.

સિદ્ધતા.

(૧) કારણ કે જો એ બે ખૂણા (આ. ૧) એકેકની બરોબર હોય તો તે દરેક એક કાટખૂણો હોવો જોઇએ; વ્યાખ્યા ૧૦).

(૨) પણ જો डबअ ખૂણો अबक ખૂણાની બરો-બર ન હોય, (આ. ૨) તો ब બિંદુમાંથી बइ લીટી कड ઉપર લંબ દોરો; (૧. ૧૧)

डबअ ખૂણો બે ખૂણા डबइ, इबअ થી બનેલો છે. માટે डबअ ખૂણો તે બે ખૂણાની બરોબર થયો. (પ્ર. પ્ર. ૮)

એ સમાનતામાં अबक ખૂણો ઉમેરો;

તો બે ખૂણા डबअ અને अबक તે ત્રણ ખૂણા डबइ, इबअ અને अबक ની બરોબર થયા. (પ્ર. પ્ર. ૨)

વળી इबक ખૂણો इबअ અને अबक ખૂણાઓથી થયેલો છે; અને તે માટે તેઓની બરોબર છે;

એ હરેકમાં डबइ ખૂણો ઉમેરો;

તો इबक અને डबइ ખૂણા તે ત્રણ ખૂણા डबइ इबअ, અને अबक ની બરોબર થયા. (પ્ર. પ્ર. ૨)

પણ એજ ત્રણ ખૂણા તો બે ખૂણા डबअ, अबक ની બરોબર છે એમ સિદ્ધ કીધું; માટે डबअ, अबक ખૂણા डबइ, इबक ખૂણાની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧)

પણ डबइ, इबक ખૂણા તો બે કાટખૂણાની બરોબર છે; (આ. ૧૦)

માટે डबअ, अबक ખૂણા પણ બન્ને મળીને બે કાટ-ખૂણાની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧) प्र. सि.

ટીપ:—પ્રતિજ્ઞા તપાશી જોતાં જણાશે કે બે લીટીઓ એકેક સાથે મળીને એકજ સીધી લીટી થઇ જાય, અથવા એકને છેડે બીજીનો છેડો મળી જાય, એવી બે લીટીઓનો વિચાર આ સિદ્ધાંતમાં કરવાનો નથી.

આ સિદ્ધાંતમાં એમ સાબિત કરવાનું છે કે બે ખૂણા થશે તે દરેક એકેક કાટખૂણો થશે; અથવા તો તે બે ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા બરોબર થશે.

વળી એ પણ સ્પષ્ટ છે કે એક લીટીને બીજી એકજ લીટી ન મળે, પણ ઘણીક લીટીઓ એકજ બિંદુ આગળ મળે તો જેટલા ખૂણા થશે તે બધા મળીને પણ બે કાટખૂણા બરોબરજ થશે, એ ઉપસિદ્ધાંતની આકૃતિ દોરવાથી સમજણ વધારે પડશે.

વ્યાખ્યા. (૧) જ્યારે બે ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણ બરોબર હોય, ત્યારે તેઓ **ન્યૂનતાપૂરક** છે એમ કહેવાય છે, અને તેમાંનો એક ખૂણો બીજાનો **ન્યૂનતાપૂરકखूणो** કહેવાય.

(૨) જો બે ખૂણાઓનો સર્વાળો એક કાટખૂણા બરોબર હોય તો તેઓ **कोटी खूणा** કહેવાય છે; અને એક ખૂણો બીજાનો **कोटी** કહેવાય.

પ્રશ્ન.

(૧) એક ત્રિકોણના પાયાને બન્ને બાજૂએ લંબાવતાં જે ખૂણા થાય તે સરખા હોય તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજૂ હોવો જોઇએ.

(૨) એક લીટી બીજી લીટી સાથે જે બે ખૂણા કરે છે તે બન્નેને દુભાગિયે તો દુભાગનારી લીટીઓ વચ્ચેનો ખૂણો કાટખૂણો થશે.

(૩) ઉપરનો પ્રશ્ન ઘણો અગત્યનો છે. તે આવી રીતે પણ લખાય:—

એક ખૂણાને અંદરથી અને બહારથી દુભાગનારી લીટીઓ એકેકને લંબ છે.

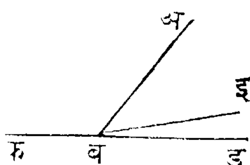
(૪) દુભાગનારી દરેક લીટી સાથે આપેલી લીટીઓ જે ખૂણા કરે છે તે ન્યૂનતાપૂરક છે.

સિદ્ધાંત ૧૪. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ-એકજ સીધી લીટીને એકજ બિંદુ આગળ પણ વિરૂદ્ધ બાજૂઓ તરફ બે બીજી સીધી લીટીઓ મળીને જે પાસપાસેના ખૂણાઓ કરે તેઓનો સર્વાળો જો બે કાટખૂણા બરોબર હોય, તો તે બે સીધી લીટીઓથી એકની એકજ અખંડ સીધી લીટી થશે.

સાધન.

अब સીધી લીટીના ब બિંદુ આગળ बक અને बड બે સીધી લીટીઓ વિરૂદ્ધ દિશાએથી આવીને अबक, अबड ખૂણા બે મળીને બે કાટખૂણા બરોબર કરે છે; તો बक અને बड લીટીઓ મળીને એકની એકજ અખંડ સીધી લીટી થશે.



સિદ્ધતાં.

કેમકે, જો बड લીટી बक લીટી સાથે એકજ અખંડ સીધી લીટીમાં ન હોય, અને જૂદીજ લીટીમાં હોઇશકે તો એમ ધારો કે कब ને લંબાવતાં તે बड દિશામાં નહિ, પણ बइ દિશામાં જશે.

તો कबइ એકજ સીધી લીટી છે;

અને તેને अब લીટી મળે છે;

માટે પાસપાસેના ખૂણાઓ अबक, अबइ બે મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે. (૧. ૧૩)

પણ अबक અને अबड ખૂણાઓ પણ બે મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે. (પ્રતિ.)

માટે અબક, અબઙ ખૂણા મળીને અબક અને અબડ ખૂણાની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧)
એ સરખા ખૂણાઓમાંથી સાધારણ ખૂણો અબક બાદ કરો;

તો બાકીનો ખૂણો અબઙ બાકીના ખૂણા અબડની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૩,)
એટલે આખો ખૂણો તેના ન્હાના ભાગની બરોબર છે; એ અશક્ય છે. (પ્ર. પ્ર. ૫.)

માટે બકને લંબાવીશું તો બઙની દિશામાં જશે નહિ; અને એવીજ રીતે આપણે સિદ્ધ કરી શકીશું કે બડ શિવાય કોઇપણ દિશામાં બક ને લંબાવવી અશક્ય છે; માટે બક અને બડ બંને મળીને એકજ અખંડ સીધી લીટીમાં હોવી જોઇએ. પ્ર. સિ.

ટીપઃ–(૧) આ સિદ્ધાંતનો પુરાવો અથવા સાબિતી ૭ માં સિદ્ધાંતના જેવી છે. પ્રતિજ્ઞામાં કહ્યા પ્રમાણે જો બે લીટીઓ ત્રિજીને મળે તો તે બે મળીને એકજ સીધી લીટીમાં હોવી જોઇએ. જો એમ ધારિયે કે તેમ નથી, તો એવાં અનુમાનનું છેવટ અશક્ય આવે છે; માટે એવું વિરૂદ્ધ અનુમાન ખોટું.

(૨) આ સિદ્ધાંત તેરમાથી ઉલટો છે.

પ્રશ્નો.

(૧) એજ સિદ્ધાંત ડબ લીટી બ બિંદુ પાર વધારીને સાબિત કરો.

(૨) પ્રતિજ્ઞામાં વિરૂદ્ધ શબ્દ લખવો અવશ્ય છે તે બતાવો; એકજ બાજૂએ એવી લીટીઓ મળી શકે કે કેમ ?

ત્રિકોણ પહેલાની અંદર પડે છે, તો બતાવો કે अत्रड ખૂણો =अकड ખૂણો.

(૩) ઉપલોજ પ્રશ્ન બે સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણો પાયાની જૂદી જૂદી બાજાએ લઇને સાબિત કરો.

(૪) એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજૂએ બે સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણો કહાડયા હોય તો બતાવો કે એકનું શિરોબિંદુ બીજા ત્રિકોણની કોઇ પણ બાજૂના ઉપર પડી શકે નહિ.

(૫) ઉપલો સિદ્ધાંત ઘણી સહેલાઇથી ૪ થા સિદ્ધાંતના ૪ થા પ્રશ્નની સહાયથી થઇ શકે છે, તે બતાવો.

(૬) એજ સિદ્ધાંત સમબાજૂઓ ન વધારતાં, તે બાજૂઓમાં ड અને इ બિંદુઓ अ થી સરખે અન્તરે લઇને સિદ્ધ કરો.

સિદ્ધાંત ૬ ઠ્ઠાની સમજણ.

જો બે પ્રમેયોમાં એકનું પક્ષ બીજાનું સાધ્ય હોય અને પેહેલાનું સાધ્ય બીજાનું પક્ષ હોય તોં તે બે પ્રમેયો એકેકના **વ્યત્યાસ** કહેવાય; વ્યત્યાસ એટલે ઉલટા; પાંચમો સિદ્ધાંત અને છઠ્ઠો વ્યત્યાસ છે એમ તેમની પ્રતિજ્ઞાઓ જોવાથી જણાશે; એટલે પાંચમાનું પક્ષ (કર્તા અથવા આપેલું) તે છઠ્ઠાનું સાધ્ય (ક્રિયાપદ, માગેલું) છે, અને પાંચમાનું સાધ્ય છઠ્ઠાનું પક્ષ છે.

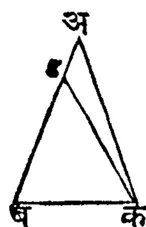
છઠ્ઠો સિદ્ધાંત **ઉલટ પક્ષનો** છે, માટે તેની સિદ્ધતા પણ ઉલટી રીતની છે; યુક્લિડની ભૂમિતિમાં ઘણી વેળાએ વ્યત્યાસ સિદ્ધાંતો ઉલટ સિદ્ધતાથીજ સાબિત કર્યા છે. સૂલટી સિદ્ધતાના દાખલા તો આપણે ઉપર જોયા; હવે ઉલટી સિદ્ધતા કેવા પ્રકારની છે તે જોવાનું રહ્યું; ધારો કે એમ સાબિત કરવું છે કે अ

ચોપડી ઘ કરતાં મ્હોટી છે; તો જો આપણે સિદ્ધ કરિયે કે अ અને ब બરોબર હોઈ નજ શકે; તેમજ अ ચોપડી ब કરતાં ન્હાની પણ હોય નજ શકે; તો સ્પષ્ટ છે કે अ ચોપડી ब કરતાં મ્હોટી હોવીજ જોઇએ. તેમજ ધારો કે अ ખૂણો ब ની બરોબર છે એવું સિદ્ધ કરવું છે; તો પહેલાં એવું સિદ્ધ કરી બતાવિયે કે જો अ ખૂણો ब કરતાં મ્હોટો હોય તો કંઇ સ્પષ્ટ અસંભાવ્યતા નિકળે; તેમજ अ, ब કરતાં ન્હાનો હોય તો પણ તેવીજ સ્પષ્ટ અસંભાવ્યતા નિકળે. ત્યારે નક્કીજ સિદ્ધ થયું કે अ અને ब બરોબરજ હોવા જોઇએ. આ જાતનો પુરાવો કદાચ શરૂઆતમાં ગુંચવણ જેવો અથવા અનિશ્ચિત જેવો લાગશે; પણ વિચાર કરતાં જણાશે કે એમાં કંઇ અનિશ્ચિતપણું નથી. સુલટા પુરાવા જેટલોજ એ મજબૂત પુરાવો છે; તોપણ જ્યાં સૂધી સુલટો પુરાવો મળી આવે છે ત્યાં સૂધી એવો પુરાવો વપરાતો નથી.

સિદ્ધાંત ૬. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—જો એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ બરોબર હોય, તો તેઓની સામેની બાજૂઓ પણ બરોબર છે.

સાધન.



अबक ત્રિકોણનો अकब ખૂણો अबक ખૂણાની બરોબર છે;

તો अब બાજૂ अक બાજૂની બરોબર થશે.

રચના.

જો अब, अक ની બરોબર ન હોય તો એ બેમાંની એક બાજૂ બીજી કરતાં મ્હોટી હોવી જોઇએ.

જો એમ બની શકે, તો ધારો કે
અવ બાજૂ અક કરતાં મ્હોટી છે.
તો અવ માંથીવડ ભાગ અક જેટલો કાપો. (૧. ૩.).
ક, ડ બિંદુઓ સાંધો.

સિદ્ધતા.

ડવક અને અવક ત્રિકોણોમાં,
ડવ લીટી અક ની બરોબર છે. (રચ.)
અને વક લીટી બન્ને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે.
અને ડવક ખૂણો અકવ ખૂણાની બરાબર છે.(પ્રતિ)
માટે એક ત્રિકોણનીડવ, વકબાજૂઓ અને અન્ત-ર્ખૂણો ડવકબીજાનીઅક,કવબાજૂઓ અને અન્ત-ર્ખૂણો અકવ નો બરોબર અનુક્રમે છે.
માટે ડવક ત્રિકોણ અકવ ની બરોબર થયો; (૧.૪)
આખો પોતાના ભાગની બરોબર;
એ અશક્ય છે. (પ. પ્ર. ૯.)

માટે આપણે અવ બાજૂ અક કરતાં મ્હોટી ધારી એ ખોટું;
તેમજ અક બાજૂ અવ કરતાં મ્હોટી હોય એ અશક્ય છે એમ સિદ્ધ કરી શકીશું.
માટે અવ બાજૂ અક કરતાં મ્હોટી પણ નથી અને ન્હાની પણ નથી.
એટલે અવ બાજૂ અકની બરોબર છે.
માટે જો એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ ઈ૦ પ્ર. સિ.

ઉપસિદ્ધાંતઃ—જો ત્રિકોણ સમકોણ હોય તો તે સમબાજૂ છે.

ટીપ:—રચનામાં અવ મ્હોટીમાંથી અક ન્હાની બરોબરનો ભાગ કાપ્યો, તે કિયા છેડાથી અ થી કે વ થી તે યાદ રાખવું.

પ્રશ્નો.

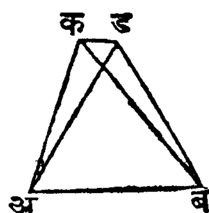
(૧) આ સિદ્ધાંતમાં કેવા પ્રકારની સિદ્ધતા વાપરી છે? તેનું કારણ શું?

(૨) સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણના પાયા ઉપરના ખૂણાઓને દ્વિભાગનારી લીટીઓથી જે બીજો ત્રિકોણ તેજ પાયા ઉપર થશે, તે પણ સમદ્વિબાજૂ થશે.

સિદ્ધાંત ૭. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ દિશાએ બે એવા ત્રિકોણો થઇ શકે નહિ કે જેઓની તે પાયાના એક છેડામાં મળતી બે બાજૂઓ એકેકને સરખીજ હોય, અને વળી એકી વખતે બીજા છેડામાં મળતી બે બાજૂઓ પણ એકેકને સરખીજ હોય.

સાધન.



જો એમ બની શકતું હોય તો એકજ પાયા અબ ઉપર, અને તેની એકજ બાજૂએ બે ત્રિકોણો અકબ અને અડબ એવા હોશે કે પાયાના અ બિંદુમાં આવી મળતી તેઓની અક અને અડ બાજૂઓ એકેકની બરોબર થાય,

અને વળી વ બિંદુમાં મળતી વક્ર અને વડ બાજૂ
ઓ પણ એકેકની બરોબરજ થાય.

પહેલું-એમ ધારો કે દરેક ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ
બીજા ત્રિકોણની બહાર પડછે; તો ક,ડ બિંદુઓ સાંધો.
(સી. ૧)

સિદ્ધતા.

અકડ ત્રિકોણમાં અક બાજૂ અડની બરોબરછે,(પ્રતિ.)
માટે અકડ ખૂણો અડકની બરોબર છે. (૧. ૫)
પણ આખો ખૂણો અકડ તેના ભાગ વકડ કરતા
મ્હોટો છે (પ્ર. પ્ર. ૯.)

માટે અડક ખૂણો પણ વકડ કરતાં મ્હોટો છે;
ત્યારે વડક ખૂણો તો વકડ કરતાં ઘણોજ મ્હોટો
હોવો જોઈએ.

પણ વકડ ત્રિકોણમાં,
વક બાજૂ વડ ની બરોબર છે, (પ્રતિ.)
માટે વડક ખૂણો વકડ ખૂણાની બરોબરછે. (૧.૫)

પણ તે તો આપણે વકડ કરતાં ઘણો મ્હોટો છે
એવું ઉપર બતાવ્યું;

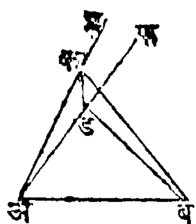
માટે ઉપર પ્રમાણે આકૃતિ દોરવાથી આ અશક્ય
પરિણામ આવ્યું:-કે એકજ ખૂણો બીજા કરતાં મ્હોટો
પણ છે અને તેની બરોબર પણ છે; માટે આપણે જે
ધારણા પ્રમાણે ઉપર બે ત્રિકોણો દોર્યા તે અશક્ય છે;
એવા ત્રિકોણો દોરી શકાય નહિ.

બીજું—એવું ધારો કે એકનું શિરોબિંદુ ડ બીજા
ત્રિકોણની અંદર પડે છે, તો

રચના.

क, ड સાંધો (સ્ટી. ૧)

અને अक, अड ને इ, फ સુધી લંબાવો. (સ્ટી. ૨)



સિદ્ધતા.

अकड ત્રિકોણમાં, अक બાજૂ अड ની બરોબર છે (પ્રતિ.)

માટે, પાયાની બીજી બાજૂના ખૂણાઓ इकडઅને फडक બરોબર છે. (૧. ૫)

પણ इकड ખૂણો તેના ભાગ बकड કરતાં મ્હોટોછે. (પ્ર. પ્ર. ૯).

માટે फडक ખૂણો પણ बकड કરતાં મ્હોટોછે.

ત્યારે बडक ખૂણો તો बकड ખૂણા કરતાં ઘણો મ્હોટો થયો.

પણ बकड ત્રિકોણમાં,बक બાજૂ बडની બરોબરછે, (પ્રતિ.)

માટે बडक ખૂણો बकड ખૂણાની બરોબર હોવો જોઇએ. (૧. ૫)

પણ તે તો ઉપર આપણે એના કરતાં મ્હોટો છે એમ બતાવ્યું;

એ એકેકથી ઉલટી વાત બનવી અશક્ય છે.

ત્રિજું-એકનું શિરોબિંદુ ड, પહેલા ત્રિકોણની कब બાજૂના ઉપર પડે તો દેખીતુંજ અશક્ય છે, કારણ કે તેમ હોય તો ન્હાની લીટી डब મ્હોટી લીટી कब ની બરોબર થઇ જાય.

માટે આપણે જોયું કે એકજ પાયાની એકજ દિ-શાએ બે એવા ત્રિકોણો દોરવા અશક્ય છે કે જેઓ-ની ઇ૦ **પ્ર. સિ.**

ટીપ:—એકજ બિંદુમાં મળતી લીટીઓને સીમાવાસી કહે છે. ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વોમાં આ સિદ્ધાંત આવતો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરવા માટેજ લખેલો દેખાય છે. એની સિદ્ધતા **જરા** નવાઇ જેવી છે. અને એની ક્વચિતજ વાપરવામાં આવે છે. આ સિદ્ધાંતનો સીધો પુરાવો નથી; અને પુરાવામાં ગુંચવણ પડવાનું કારણ દેખીતું છે કે **નકાર** વસ્તુ સાબિત કરવી છે; એટલે એમ બતાવવું છે કે એક અમુક જાતના ત્રિકોણો થઇ **ન શકે.** પુરાવો એવી રીતે આપ્યો છે કે, ધારો કે તેમ થઇ શકે, તો તેથી એક અસંભવિત અનુમાન નિકળશે. પણ એવું અશક્ય અનુમાન તો સ્વીકારાયજ નહિ; માટે જે ધારણાને લીધે આવા પરિણામ ઉપર આપણે આવી પહોંચ્યા તે ધારણા ખોટી હોવી જોઇએ.

ઉપરના સિદ્ધાંતમાં સાબિત કરવું છે કે જેવા ત્રિકોણો ક-હેલા છે તેવા દોરી શકાય નહિ. જો એવા દોરી શકાતા હોય તો દોરો. હવે એવા ત્રિકોણો ત્રણ રીતે દોરી શકાય; માટે ત્રણે રીતે દોરવા અશક્ય છે એવું સાબિત કીધું છે. જો એવા ત્રિકોણો દોરી શકાય તો એવું બતાવ્યું છે કે એકનો એકજ ખૂણો એક બીજા અમુક ખૂણા કરતાં મ્હોટો પણ હોવો જોઇએ, અને વળી તેની બરોબર પણ હોવો જોઇએ. પણ એતો અશક્ય અનુમાન છે; માટે જે આપણે પહેલાં સાચું માની લીધું તેમાં ભૂલ કીધી. એક છેડે મળતી બે બા-જૂઓ પણ સરખીજ હોય એ બનવું અશક્ય છે.

યાદ રાખવું કે ગમે તે એક છેડામાં મળતી બે બાજૂઓ સરખી હોય તો તેમાં કાંઇ બાધ નથી, તેમ તો થઇ શકે;

अक અને अड સરખી હોઇ શકે, પણ ત્યારે बक અને बड સરખી થાયજ નહિ.

પ્રશ્નો.

(૧) એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજૂએ બે સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણો કહાડિયે તો એકનું શિરોબિંદુ બીજાની અંદર પડવું જોઇએ.

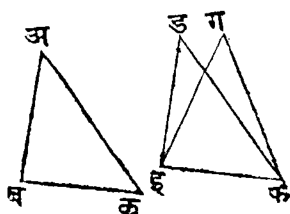
(૨) આ સિદ્ધાંતમાં આપેલી ચાર શરતો જૂદી જૂદી લખો; અને બતાવો કે તેમાંની એક પણ શરત છોડિયે તો સિદ્ધાંત ખોટો પડી જશે.

સિદ્ધાંત ૮. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—જો એક ત્રિકોણની બે બાજૂઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની બે બાજૂઓની બરોબર હોય, અને વળી તેમના પાયા એટલે ત્રીજી બાજૂઓ પણ બરોબર હોય, તો એક ત્રિકોણની બે બાજૂઓની વચ્ચેનો અન્તર્ખૂણો બીજા ત્રિકોણની બે બાજૂઓના અન્તર્ખૂણાની બરોબર થશે.

સાધન

ધારો કે अबक અને इडफ બે એવા ત્રિકોણો છે કે बअ, अक બાજૂઓ અનુક્રમે इड, डफ બાજૂઓની બરોબર છે; એટલે बअ, इड ની બરોબર, અને अक, डफ ની બરોબર; અને बक પાયો इफ પાયાની બરોબર છે; તો बअक ખૂણો इडफ ખૂણાની બરોબર થશે.



સિદ્ધતા.

જો अबक ત્રિકોણ (ઉંચકીને) डइफ ત્રિકોણ ઉપર એવી રીતે મૂકિયે કે ब બિંદુ इ બિંદુ ઉપર પડે, અને बक સીધી લીટી इफ ની દિશામાં પડે,

તો क બિંદુ फ બિંદુ ઉપરજ પડશે,

કારણ કે बक લીટી इफ ની બરોબર છે; (પ્રતિ,)

અને बक લીટી इफ ઉપર પડેછે, માટે

बअ, अक લીટીઓ પણ इड, डफના ઉપરજ પડશે;

કારણ કે, જો તેમ ના પડે, તો ધારો કે તે લીટીઓ બીજેજ સ્થળે, इग, गफ ની દિશાએ પડેછે.

હવે इग અને इड દરેક अब ની બરોબર છે.

અને फड, फग, દરેક अक ની બરોબર છે, માટે

इड લીટી इग બરોબર,અનેफड લીટીफग બરોબર; (પ્ર. પ્ર. ૧.)

ત્યારે તો એકજ પાયા इफ ઉપર અને તેની એકજ બાજૂએ બે ત્રિકોણો इडफ, इगफ, એવા થયા કે इ બિંદુમાં મળતી બાજૂઓ સરખી થઈ, અને વળી फ બિંદુમાં મળતી બાજૂઓ પણ સરખી થઇ. એ બનવું અશક્ય છે. (૧, ૭)

માટે बअ,अक લીટીઓ इड,डफ ના ઉપરજ પડવી જોઇએ;

અને બીજી કોઇ રીતે પડી શકે નહિ.

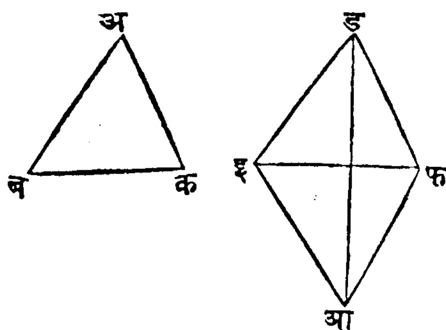
પણ જો તેમ હોય ત્યારે તો अ ખૂણો ड ના ઉપરજ પડયો; એટલે बअक ખૂણો इडफ ની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૮)

માટે જો એક ત્રિકોણની બે બાજૂઓ ઈ૦ प्र. सि,

ઉપસિદ્ધાંતઃ-ઉપલા સિદ્ધાંત ઉપરથી સ્પષ્ટ છે કે એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજૂઓ અનુક્રમે બીજાની ત્રણ બાજૂઓની બરોબર હોય તો તે ત્રિકોણો પણ એકેકની બરોબર છે.

ટીપઃ-ઉપલી સિદ્ધતાનો આધાર પણ ઉલટ પુરાવા ઉપર રહેલો છે; અને વળી ૭ મા સિદ્ધાંતની સહાયથી સિદ્ધ થયો છે, જે સિદ્ધાંત સમજવો જરા કઠિન છે, માટે એજ સિદ્ધાંત નીચેની રીતે પણ સિદ્ધ થઇ શકે છે.

अबक ને **डइफ** ઉપર એવી રીતે મૂકો કે **ब** બિંદુ **इ**



ઉપર પડે; અને **बक** લીટી **इफ** ની દિશાએ પડે; અને તેનું **अ** શિરોબિંદુ **इफ** ની પાયાની બીજી બાજૂ ઉપર પડે.

હવે **बक** લીટી **इफ** ની બરોબર છે, માટે **क** બિંદુ **फ** ઉપરજ પડશે.

ત્યારે **बअक** ત્રિકોણ **इआफ** સ્થળે પડશે.

डआ સાંધો. **इआ=अब** (રચ.)

પણ **इड=अब** (પ્રતિ.) ∴ **इआ=इड** (પ્ર. પ્ર. ૧)

∴<इडआ=<इआड (१. ५)
તેમજ डफ બરોબર आफ ∴ <आडफ=<फआड.
∴આખો ખૂણો इडफ=इआफ (પ્ર. પ્ર. ૨)
પણ<इआफ=<बअक (પ્રતિ.) ∴ <इडफ=<बअक.
प्र. सि.

જો क અને फ ખૂણા પહોળા ખૂણા હોય તો डआ લીટી ત્રિકોણની બહાર પડશે, અને તેઓ કાટખૂણા હોય તો डफ અને फआ જોડાઈને डआ થશે, પણ સિદ્ધતા તો ઉપર પ્રમાણેજ રહેશે.

પ્રશ્ન.

(૧) એક સમબાજૂ ચતુષ્કોણનો કર્ણ જે ખૂણાઓ સાંધેછે તે ખૂણાને દ્વિભાગે છે.

(૨) એક સમબાજૂ ચતુષ્કોણના કર્ણ એકેકને દ્વિભાગેછે, અને એકેક ઉપર લંબ છે.

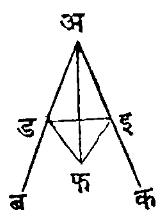
(૩) સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણના પાયાનું મધ્યબિંદુ તેના શિરોબિંદુ સાથે એક લીટીથી સાંધ્યું તો તે લીટી શિરોબિંદુને તથા ત્રિકોણને દ્વિભાગશે અને પાયા ઉપર લંબ થશે.

સિદ્ધાંત ૯. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક આપેલા સીધીલીટી ખૂણાને દ્વિભાગવો, એટલે તેના બે સરખા ભાગ કરવા.

સાધન.

ધારો કે बअक આપેલો ખૂણોછે; તેને દ્વિભાગવો છે.



રચના.

अब લીટીમાં એક ड બિંદુ લો;

અને अक લીટીમાંથી अइ ભાગ अड બરોબર કાપો. (૧. ૩)

ड અને इ સાંધો (સ્વી. ૧)

અને डइ લીટી ઉપર अ બિંદુની સામેની તરફ એક સમબાજૂ ત્રિકોણ डफइ દોરો. (૧. ૧.)

अ અને फ સાંધો. (સ્વી. ૧)

તો अफ લીટી वअक ખૂણાને દ્વિભાગશે.

સિદ્ધતા.

डअफ અને इअफ ત્રિકોણોમાં डअ લીટી इअ ની બરોબર છે. (રચ.)

અને अफ બન્નેમાં સાધારણ છે.

અને ત્રીજી બાજૂ डफ ત્રીજી બાજૂ इफની બરોબર છે. (રચના.)

માટે डअफ ખૂણો इअफ ખૂણાની બરોબરછે. (૧.૮)

માટે આપેલા ખૂણા वअक ના अफ લીટીથી બે સરખા ભાગ થયા. क्षि. क्षि.

પ્રશ્ન.

(૧) એજ આકૃતિમાં બતાવો કે अफ લીટી डफइ ખૂણો પણ દ્વિભાગે છે.

(૨) એક આપેલા ખૂણાના ચાર સરખા ભાગ કરો.

(૩) જો डफइ ત્રિકોણ अ શિરોબિંદુવાળી બાજુએ કહાડ્યો હોય તોપણ સિદ્ધાંત સિદ્ધ થઈ શકે છે.

(૪) પણ તેમ કરતાં એક અમુક પ્રસંગે બાધ આવેછે તે ક્યારે ?

(૩) એક સમબાજૂ ચતુષ્કોણની એક કર્ણ દુભાગીને તે બિંદુમાંથી સામેના બન્ને ખૂણા સુધી બે લીટીઓ દોરિયે તો તે બે લીટી એકજ સીધી લીટીમાં છે.

સિદ્ધાંત ૧૫. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—જો બે સીધી લીટીઓ એક બીજીને છેદે તો સામસામેના ખૂણા બરાબર થશે.

સાધન.

ધારો કે अब અને कड સીધી લીટીઓ એક બીજીને इ બિંદુમાં છેદે છે;

તો अइक ખૂણો डइब ખૂણાની બરોબર થશે,

અને कइब ખૂણો अइड ખૂણાની બરોબર થશે.



સિદ્ધતા.

अइ લીટી कड લીટી સાથે પાસપાસેના ખૂણા कइअ, अइड કરે છેઃ માટે તે બે ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે. (૧. ૧૩)

અને વળી डइ લીટી अब લીટીની સાથે अइड, डइब ખૂણા કરે છે; માટે તે બે ખૂણા મળીને પણ બે કાટખૂણા બરોબર છે.

માટે कइअ, अइड ખૂણાઓ अइड, डइब ખૂણાઓની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧.)

એ સમખૂણાઓમાંથી સાધારણ ખૂણો अइड બાદ કરો;

તો બાકી રહેલો ખૂણો કઇઅ બાકી રહેલા ખૂણા ડઇવ ની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૩)

એજ પ્રમાણે વઇક ખૂણો અઇડ ખૂણાની બરોબર સિદ્ધ થઈ શકે.

માટે જો બે સીધી લીટીઓ ૬૦ પ્ર. સિ.

ઉપસિદ્ધાંત ૧. આ ઉપરથી સ્પષ્ટ છે કે જો બે સીધી લીટીઓ એક બીજાને છેદે, તો છેદવાના બિંદુ આગળ જે ખૂણાઓ થાય તે બધા મળીને ચાર કાટખૂણાની બરોબર છે.

ઉ. સિ. ૨. તેમજ ગમે એટલી સીધી લીટીઓ એકજ બિંદુ આગળ એકેકને છેદે તો તે બિંદુ આગળ જેટલા ખૂણાઓ થાય તે બધા મળીને ચાર કાટખૂણાની બરોબર છે.

ટીપઃ–(૧) આ સિદ્ધાંતને સંક્ષેપમાં બતાવિયે, તો એમ કહેવાય કે, સામસામેના ખૂણાઓનો ન્યૂનતાપૂરક ખૂણો સાધારણ છે તેથી તે ખૂણાઓ બરોબર છે.

(૨) આ સિદ્ધાંત ખૂણાની વ્યાખ્યાનો માત્ર વધારો છે એમ કહી શકાય. બે સીધી લીટીઓ એક બીજીને મળે ત્યારે તેઓની વચ્ચેનો ઝોક તે એક ખૂણો થયો, પણ તે ખૂણાના શિરોબિંદુની પાર તે લીટીઓને વધારિયે તોપણ તે ખૂણો કાંઇ બદલાતો નથી, એવું આ સિદ્ધાંતમાં બતાવ્યું છે.

પ્રશ્ન.

(૧) આ સિદ્ધાંતના ઉલટ પક્ષની પ્રતિજ્ઞા લખો, અને તે સિદ્ધ કરો.

(૨) ઉપલા બે ઉપસિદ્ધાંતોની આકૃતી દોરો અને સિદ્ધ કરો.

(૩) અરસ્પરસ છેદનારી બે લીટીઓના કોઇ પણ સામસામેના ખૂણાઓને દુભાગનારી બે લીટીઓ એકજ અખંડ સીધી લીટીમાં હોવી જોઇએ.

(૪) એક ખૂણાના શિરોબિંદુમાંથી તે ખૂણાઓની બન્ને બાજૂઓ ઉપર લંબ દોરી, તો તે લંબોની વચ્ચેનો ખૂણો આપેલા ખૂણાની બરોબર થશે, અથવા તે ખૂણાનો ન્યૂનતાપૂરક ખૂણો થશે.

(૫) જે ચતુષ્કોણની કર્ણો એકેકને દુભાગે તેની સામસામેની બાજૂઓ બરોબર છે.

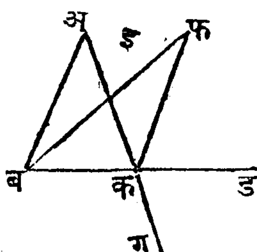
(૬) એક ત્રિકોણની અંદર એક બિંદુ લઇને તેને ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણા સાથે જોડીએ, તો તે બિંદુ આગળના ખૂણા બધા મળીને ચાર કાટખૂણાની બરોબર થશે.

સિદ્ધાંત ૧૬. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—જો કોઈ ત્રિકોણની એક બાજૂને લંબાવી તો બહારનો ખૂણો માંહેના સામસામેના ખૂણા માંહેલા કોઈ પણ એક કરતાં મ્હોટો થશે.

સાધન

अबक એક ત્રિકોણ છે;જેની बक બાજૂ ड બિંદુ સૂધી લંબાવી, તો બહારનો ખૂણો अकड માંહેના સામસામેના कबअ, बअक હરેક ખૂણા કરતાં મ્હોટો થશે.



રચના.

अक બાજૂને इ બિંદુમાં દુભાગો, (૧. ૧૦.)
बइ સાંધો; અને તેને फ બિંદુ સૂધી લંબાવો, અને इफ લીટી बइ લીટી જેટલી કરો. (૧. ૩)
फक બિંદુઓ સાંધો.

સિદ્ધતા.

અइब, कइफ ત્રિકોણોમાં, अइ લીટી कइ ની બરો-
બર છે, (૨૫.)
અને इब લીટી इफ ની બરોબર છે, (૨૫.)
અને अइब ખૂણો સામેના ખૂણા कइफ ની બરો-
બર છે, (૧ ૧૫.)
માટે अइब ત્રિકોણ સર્વ પ્રકારે कइफ ત્રિકોણની બ-
રોબર છે. (૧. ૪)

માટે बअइ ખૂણો इकफ ખૂણાની બરોબર છે.
પણ इकड ખૂણો इकफ ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે.
માટે इकड ખૂણો बअइ ખૂણા કરતાં પણ મ્હોટો છે.
એટલે બહારનો ખૂણો अकड માંહેલા ખૂણા बअक
કરતાં મ્હોટો છે.

એવીજ રીતે, જો बक ને દુભાગીને अक લીટી ग બિંદુ
સુધી વધારીશું, તો बकग ખૂણો अबक ખૂણા કરતાં
મ્હોટો સિદ્ધ કરીશું.

પણ बकग ખૂણો તો अकड ખૂણાની બરોબર છે;(૧.૧૫)
માટે अकड ખૂણો પણ अबक ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે.
માટે જો કોઇ ત્રિકોણની ઇ० પ्र० સિ०

પ્રશ્ન.

(૧) अकड ખૂણો अबक કરતાં મ્હોટો છે તે આકૃતિ
દોરીને સિદ્ધ કરો.

(૨) તેમજ अ આગળનો બહારનો ખૂણો ब ખૂણા
કરતાં મ્હોટો છે તે સિદ્ધ કરો.

(૩) એક ત્રિકેાણનેા પ્રત્યેક ખૂણેા બીજા ખૂણાએા માંહેલા હરેકના ન્યૂનતાપૂરક ખૂણા કરતાં ન્હાનેા છે.

(૪) એક ત્રિકેાણમાં એક ખૂણેા કાટખૂણેા અથવા પહેાળેા ખૂણેા હેાય તેા બીજા ખૂણા સાંકડા હેાવા જોઇએ.

(૫) એક બહારના બિંદુમાંથી એકજ સીધી લીટી ઉપર બે લંબ દેારી શકાય નહિ.

(૬) એક સમબાજૂ ત્રિકેાણની એક બાજૂ લંબાવી તેા બહારનેા ખૂણેા અંદરના પ્રત્યેક ખૂણા કરતાં મ્હેાટેા હેાવેા જોઇએ, તથા તે ખૂણેા પહેાળેા ખૂણેાજ હેાવેા જોઇએ.

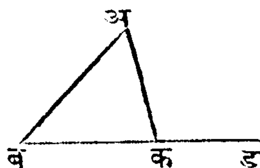
(૭) એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકેાણના સરખા ખૂણાએા સાંકડા ખૂણાજ હેાવા જોઇએ.

સિદ્ધાંત ૧૭. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ-એક ત્રિકેાણના કેાઇ પણ બે ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા કરતાં એાછા છે.

સાધન

अबक એક ત્રિકેાણ છે; તેા તેના કેાઈ પણ બે ખૂણા, જેવા કે अबक, अकब બન્ને મળીને બે કાટખૂણા કરતાં એાછા છે.



રચના.

बक બાજૂને ड બિંદુ સૂધી લંબાવેા.

સિદ્ધતા.

अकड ખૂણેા अबक ત્રિકેાણનેા બહારનેા ખૂણેા છે, માટે તે માંહેલા સામેના ખૂણા अबक કરતાં મ્હેાટેા છે.
(૧. ૧૬)

એ હરેક ખૂણામાં અકબ ખૂણો ઉમેરો;

ત્યારે અકડ, અકબ ખૂણાઓઅબક, અકબ ખૂણાઓ કરતાં મ્હોટા છે. (પ્ર. પ્ર. ૪)

પણ પાસંપાસેના અકડ, અકબ ખૂણાઓ બે કાટખૂણાની બરોબર છે, (૧. ૧૩)

માટે અબક, અકબ ખૂણાઓ મળીને બે કાટખૂણાઓ કરતાં ઓછા છે.

એજ પ્રમાણે સિદ્ધ થઇ શકશે કે હરકોઇ બે ખૂણાઓ મળીને બે કાટખૂણા કરતાં ઓછા છે.

માટે જો એક ત્રિકોણના કોઇપણ ૬૦ પ્ર. સિ.

ટીપઃ—(૧) આ સિદ્ધાંત ૧૬ માનો માત્ર ઉપસિદ્ધાંતજ છે.

(૨) સિદ્ધાંત ૧૬–૧૭ બન્ને ૩૨ મા સિદ્ધાંતમાં સમાઇ જાય છે, તે તે સિદ્ધાંતની પ્રતિજ્ઞા વાંચવાથી જણાશે.

(૩) આ સિદ્ધાંત ઉપરથી જણાય છે કે કોઇ પણ ત્રિકોણમાં ઓછામાં ઓછા બે સાંકડાખૂણા તો હોવાજ જોઇએ.

(૪) આ સિદ્ધાંત ૧૨ પ્રત્યક્ષ પ્રમાણનો ઉલટ પક્ષ છે.

પ્રશ્નો.

(૧) આ સિદ્ધાંતની અને બારમા પ્રત્યક્ષ પ્રમાણની પ્રતિજ્ઞાઓ એવી રીતે લખો કે તે ઉપરથી એક બીજાના ઉલટ પક્ષ છે તે દેખાઈ આવે.

(૨) ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુને સામેની બાજૂના કોઇપણ બિંદુ સાથે સાંધીને આ સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો

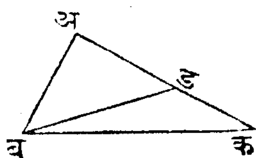
(૩) જો એક ત્રિકોણની કોઇપણ બે બાજૂઓ લંબાવી તો બહારના બે ખૂણાઓ બે કાટખૂણા કરતાં વધારે થશે.

(૪) એક ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી એક લંબ પાયા ઉપર દોરી, તો તે લંબ ત્રિકોણની અંદર કયારે પડશે અને બહાર કયારે પડશે ?

સિદ્ધાંત ૧૮. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—કોઈપણ ત્રિકોણમાં જો એક બાજૂ બીજી કરતાં મ્હોટી હોય તો મ્હોટી બાજૂની સામેનો ખૂણો ન્હાની બાજૂની સામેના ખૂણા કરતાં મ્હોટો થશે.

સાધન.



ધારો કે अबक એ ત્રિકોણ છે, જેની अक બાજૂ अब કરતાં મ્હોટી છે.

તો अबक ખૂણો अकब ખૂણા કરતાં મ્હોટો થશે.

રચના.

મ્હોટી अकમાંથી ન્હાની अब જેટલો એક ભાગ अड કાપો; (૧. ૩)

बड સાંધો.

સિદ્ધતા.

अबड ત્રિકોણમાં अब બાજા, अडની બરોબર છે, માટે अबड ખૂણો अडब ખૂણાની બરોબર છે. (૧. ૫)

પણ बडक ત્રિકોણનો બહારનો ખૂણો अडब માંહેલા ખૂણા डकब એટલે अकब કરતાં મ્હોટો છે;

માટે अबड ખૂણો પણ अकब ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે;

ત્યારે अबक ખૂણો તો अकब ખૂણા કરતાં ઘણો મ્હોટો હોવો જોઇએ.

માટે કોઈ પણ ત્રિકોણમાં જો એક બાજૂ ઇ૦પ્ર૦સિ૦

પ્રશ્ન.

(૧) ન્હાની બાજૂ अब વધારીને अक જેટલી બનાવીને આ સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૨) આ સિદ્ધાંતની મદદથી છઠ્ઠો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૩) એક ચતુષ્કોણાકૃતિમાં ચારેમાં મ્હોટી અને ચારેમાં ન્હાની બાજૂઓ એક બીજાની સામે હોય, તો એવું બતાવો કે તે ન્હાની બાજૂ ઉપરનો પ્રત્યેક ખૂણો તેના સામેના ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે.

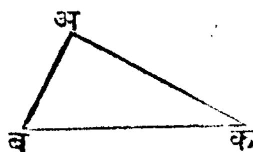
સિદ્ધાંત ૧૯. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—જો કોઇ ત્રિકોણમાં એક ખૂણો બીજા કરતાં મ્હોટો હોય તો મ્હોટા ખૂણાની સામેની બાજૂ ન્હાના ખૂણાની સામેની બાજૂ કરતાં મ્હોટી થશે.

સાધન.

ધારો કે अबक ત્રિકોણમાં अबक ખૂણો अकब ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે.

તો अक બાજૂ अब બાજૂ કરતાં મ્હોટી થશે.



સિદ્ધતા.

કેમકે જો अक બાજૂ अब કરતાં મ્હોટી ન હોય, તો अक બાજૂ अब ની બરોબર હોય અથવા अब કરતાં ન્હાની હોય.

પણ अक બાજૂ अबની બરોબર તો હોય ન શકે; કારણ કે તેમ હોય તો अबक અને अकब ખૂણા બરોબર થાય. (૧.૫)

પણ તે ખૂણાઓ કાંઈ બરોબર નથી. (પ્રતિ.)

વળી अक બાજૂ अब કરતાં ન્હાની પણ હોય ન શકે; કારણ કે તેમ હોય તો अबक ખૂણો अकब કરતાં ન્હાનો થાય. (૧. ૧૮)

પણ તેમ તો નથી. (પ્રતિ.)
માટે अक લીટી अव्रनी બરોબર પણ નથી અને તેથી ન્હાની પણ નથી;

એટલે अक બાજૂ अव्र કરતાં મ્હોટી છે

માટે જો કોઇ ત્રિકોણમાં એક ખૂણો ૯૦ प्र સિ.

ટીપઃ—૧૮મા તથા ૧૯મા સિદ્ધાંતમાં પેહેલો કયો અને બીજો કયો એ સ્મરણમાં રાખવું મુસ્કિલ લાગે છે માટે યાદ રાખવું કે ૧૮ મો ૫ મા પ્રમાણે છે અને ૧૯ મો છઠ્ઠા પ્રમાણે છે.

પ્રશ્ન.

(૧) એક કાટખૂણ ત્રિકોણમાં કઇ બાજૂ સર્વથી મ્હોટી?

(૨) એક **अवक्र**સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણનો **वक्र** પાયો **ड** બિંદુ સૂધી લબાવીને **अड** લીટી દોરી; તો તે લીટી ત્રિકોણની સરખી બાજૂઓ કરતાં મ્હોટી થશે.

(૩) કોઇપણ ત્રિકોણની બે બાજૂઓ અસમાન હોય તો તે બાજૂઓ વચ્ચેના શિરોબિંદુથી સામી બાજૂના કોણ પણ બિંદુ સૂધી દોરેલી લીટી તે બેમાંની મ્હોટી બાજૂ કરતાં ન્હાની હોવી જોઇએ.

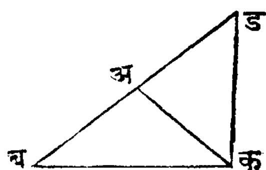
(૪) એક આપેલી લીટી ઉપર એક બહારના બિંદુથી જે લીટીઓ દોરિયે તેમાં જે લીટી આપેલી લીટી ઉપર લંબ હોય તે સૌથી ન્હાની; અને તે લંબની એકજ તરફની બીજી લીટીઓ લઇએ તો જે લીટી લંબની વધારે પાસે તે લીટી વધારે દૂરની લીટી કરતાં ન્હાની; અને આપેલા બિંદુમાંથી બબ્બેજ લીટી લંબની દરેક બાજૂએ સરખી દોરી શકાય.

સિદ્ધાંત ૨૦. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:-એક ત્રિકોણની કોઇ પણ બે બાજૂઓ મળીને ત્રીજી કરતાં મ્હોટી છે.

સાધન

ધારો કે अबक આપેલો ત્રિકોણછે; તો તેની કોઇપણ બે બાજૂ મળીને ત્રિજી કરતાં મ્હોટી થશે;



એટલે बअ, अक મળીને कच કરતાં મ્હોટી,

अक,कच મળીને अच કરતાં મ્હોટી,

અને कब, बअ મળીને अक કરતાં મ્હોટી.

રચના.

बअ લીટી લંબાવીને, બહારનો अड ભાગ अक બરોબર કરો; (૧. ૩).

અને डक સાંધો.

સિદ્ધતા.

अडकત્રિકોણમાં अडબાજૂ अकની બરોબર છે,(રચ.)
માટે अकड ખૂણો अडक ખૂણાની બરોબર છે.(૧.૫)
પણबकडખૂણો अकड ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે.(પ્ર.પ્ર.૯)
માટે बकड ખૂણો अडक એટલે बडक ખૂણા કરતાં પણ મ્હોટો છે.

વળી बकड ત્રિકોણમા,

बकड ખૂણો बडक ખૂણા કરતાં મ્હોટો હોય,
તો बड બાજૂ बक કરતાં મ્હોટી થવી જોઇએ. (૧.૧૯)
માટે, बड લીટી એટલે बअ અને अड મળીને बक કરતાં મ્હોટી;

પણ अड લીટી તો अकની બરોબર છે. (રચ.)
માટે बअ અને अक મળીને बक કરતાં મ્હોટી છે.

એજ પ્રમાણે અક, કવ મળીને અવ કરતાં મ્હોટી, અને કબ, બઅ મળીને અક કરતાં મ્હોટી છે એમ સિદ્ધ કરી શકાય.

માટે એક ત્રિકોણની કોઇ પણ બે બાજૂઓ ઇ૦પ્ર.સિ.

પ્રશ્ન.

(૧) આ સિદ્ધાંત **અ** ખૂણો દુભાગવાથી સિદ્ધ કરો.

(૨) તેમજ **અ** ખૂણામાંથી પાયા ઉપર લંબ દોરવાથી સિદ્ધ કરો.

(૩) કોઇ પણ બે બાજૂની બાદબાકી ત્રિજી બાજૂ કરતાં ન્હાની છે

(૪) બે બિંદુઓ વચ્ચે ટુંકામાં ટુંકો અન્તર એક સિધી લીટી છે.

(૫) જો એક ચતુષ્કોણાકૃતિની સામસામેની બાજૂઓ લંબાવતાં મળી જાય તો આખા ત્રિકોણની પરિમિતિ તે ચતુષ્કોણની પરિમિતિ કરતાં વધારે હોવી જોઇએ.

(૬) એક ત્રિકોણમાં કોઈ પણ બિંદુ લઇને તેને ત્રણે ખૂણાઓ સાથે સાંધ્યું હોય તો સાંધનારી લીટીઓ મળીને ત્રિકોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે થશે.

(૭) એક ચતુષ્કોણાકૃતિની પરિમિતિ તેની બે કર્ણોના સર્વાળા કરતાં વધારે છે.

(૮) બહુકોણાકૃતિમાં એક બિંદુ લઇને બધા ખૂણાઓ સાથે સાંધ્યું હોય તો સાંધનારી લીટીઓ મળીને તે આકૃતિની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે થશે.

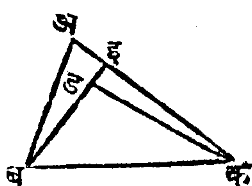
(૯) ત્રિકોણની એક બાજૂને દુભાગનારા બિંદુથી સામા ખૂણા સૂધી દોરેલી લીટીની બમણાઈ કરતાં તે ત્રિકોણનો બે બાજૂનો સર્વાળો વધારે છે

સિદ્ધાંત ૨૧ પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—જો એક ત્રિકોણની એક બાજૂના છેડાઓ-

માંથી તે ત્રિકોણની અંદરના એક બિંદુ સુધી બે લી-
ટીઓ દોરિયે, તો તે લીટીઓ ત્રિકોણની બીજી બે બાજૂ-
ઓ કરતાં ઓછી થશે, પણ તેઓની વચ્ચેનો ખૂણો
તે બાજૂઓની વચ્ચેના ખૂણા કરતાં મ્હોટો થશે.

સાધન.



अबक એક ત્રિકોણ છે; તેની बक બાજૂના ब અને क છેડાઓમાંથી તે ત્રિકોણની અંદરના ड બિંદુ સુધી बड અને कड લીટીઓ દોરો.

તો (૧) बड અને कड મળીને बअ અને अक કર-
તાં ઓછી થશે;

(૨) बडक ખૂણો बअक ખૂણા કરતાં મ્હોટો થશે.

રચના.

बड ને લંબાવીને अक લીટીને इ બિંદુમાં છેદવા દો.

સિદ્ધતા.

(૧) बअइ ત્રિકોણમાં बअ અને अइ મળીને बइ કરતાં મ્હોટી છે. (૧. ૨૦)

એ પ્રત્યેકમાં इक ઉમેરો.

ત્યારે बअ, અને अक લીટી बइ અને इक કરતાં મ્હોટી થઇ. (પ્ર. પ્ર. ૪)

વળી डइक ત્રિકોણમાં डइ અને इक બાજુઓ डक કરતાં મ્હોટા છે. (૧. ૨૦)

એ પ્રત્યેકમાં बड ઉમેરો;

ત્યારે बइ અને इक લીટીઓ बड અને डक કરતાં મ્હોટી છે. (પ્ર. પ્ર. ૪.)

પણ ઉપર બતાવ્યું કે बअ અને अक લીટીઓ बइ અને इक કરતાં મ્હોટી છે.

માટે बअ અને अक બાજૂઓ बड અને डक કરતાં તેા વધારે મ્હેાટી થઇ.

(૨) વળી, डइक ત્રિકેાણનેા બહારનેા ખૂણેા बडक માંહેલા સામેના डइक કરતાં મ્હેાટેા છે. (૧. ૧૬.)

અને बअइ ત્રિકેાણનેા બહારનેા ખૂણેા डइक માંહેલા સામેના ખૂણા बअइ એટલે बअक કરતાં મ્હેાટેા છે. (૧. ૧૬)

માટે बडक ખૂણેા बअक કરતાં વધારે મ્હેાટેા થયેા.

માટે જો એક ત્રિકેાણની એક બાજૂના ઙ૦ प्र. सि.

પ્રશ્ન.

(૧) આ સિદ્ધાંતનેા બીજો ભાગ अड લીટી સાંધીને પાયા સૂધી વધારીને સિદ્ધ કરેા.

(૨) એક ત્રિકેાણમાં એક બિંદુ લઇને તેને પ્રત્યેક ખૂણા સાથે જોડવાથી જે ત્રણ લીટીઓ થશે તેઓ બધી મળીને ત્રિકેાણની ત્રણ બાજૂ કરતાં એાછી થશે.

(૩) આપેલું બિંદુ ત્રિકેાણની એક બાજૂમાંજ લઇને આ સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરેા.

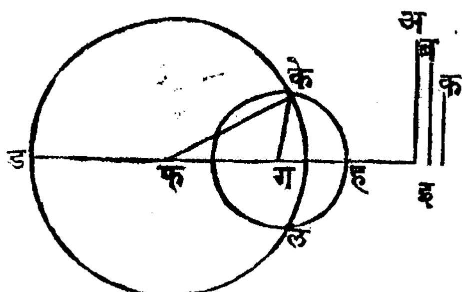
સિદ્ધાંત ૨૨. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક એવેા ત્રિકેાણ કરવેા કે તેની બાજૂઓ અનુક્રમે આપેલી ત્રણ લીટીઓની બરેાબર થાય; જે આપેલી લીટીઓ માંહેલી કેાઇપણ બે મળીને ત્રીજી કરતાં મ્હેાટી છે.

સાધન.

ધારેા કે अ, ब, क, આપેલી ત્રણ લીટીઓ છે;

જેમાંની કોઈપણ બે મળીને ત્રીજી કરતાં મ્હોટી છે.
એટલે अ અને ब મળીને क કરતાં મ્હોટી,
अ અને क મળીને ब કરતાં મ્હોટી,



અને ब ને क મળીને अ કરતાં મ્હોટી;
તો એક એવો ત્રિકોણ બનાવવાનો છે કે જેની ત્રણે બાજૂઓ અનુક્રમે अ, ब અને क ની બરોબર હોય.

રચના.

એક डइ સીધી લીટી દોરો; એવી કે ड બિંદુ આગળ સમર્યાદ એટલે હદ થયલી હોય અને इ બિંદુ તરફ લંબાવી શકાય.
પછી डफ ભાગ अ લીટી બરોબર,
फग ભાગ ब લીટી બરોબર,
અને गह ભાગ क લીટી બરોબર કાપો (૧. ૩.)
फ બિંદુને મધ્યબિંદુ લઇને અને फड જેટલી ત્રિજ્યા લઇને એક વર્તુલ डलके દોરો. (સ્વી. ૩)
ग મધ્યબિંદુ અને गह ત્રિજ્યા લઇને એક વર્તુલ लहके દોરો. (સ્વી. ૩)
એ બે વર્તુલો के અને ल બિંદુઓમાં છેદે છે.

फके અને गके સાંધો. (સ્વી. ૧)
તો केफग માગેલો ત્રિકોણ થશે.

સિદ્ધતા.

डलके વર્તુલનું फ મધ્યબિંદુ છે,
માટે फके લીટી फड ની બરોબર છે; (વ્યાખ્યા ૧૫)
પણ फड લીટી તો अ લીટીની બરોબર છે;
માટે फके લીટી પણ अ લીટીની બરોબર છે. (પ્ર.પ્ર.૧.)
વળી, हलके વર્તુલનું ग મધ્યબિંદુ છે,
માટે गके લીટી गह ની બરોબર છે; (વ્યા. ૧૫)
પણ गह લીટી क લીટીની બરોબર છે;
માટે गके લીટી પણ क લીટીની બરોબર છે. (પ્ર.પ્ર.૧)
અને फग લીટી ब લીટીની બરોબર છે; (રચના.)
માટે केफग એવો ત્રિકોણ થયો કે તેની ત્રણ બાજૂઓ केफ, फग અને गके અનુક્રમે આપેલી લીટીઓ अ, ब, क ની બરોબર છે. कृ कृ.

ટીપ:—સહજ વિચાર કરતાં અને બરોબર આકૃતિ કહાડતાં જણાશે કે જે શરત પ્રતિજ્ઞામાં આપી છે તે આપી ન હોત તો જે બે વર્તુલો દોરાયા તે અવસ્ય એકેકને છેદત નહિ; કદાચ એક વર્તુલ બીજાની અંદર પડત, અથવા બિલકુલ બહાર પડત. પણ આપેલી શરત પ્રમાણે તો છેદવા જોઇએજ, અને ન છેદે એ અસંભવિત છે. તે ઉપર કહેલી બે આકૃતિઓ જૂદી જૂદી દોરવાથી સહજ સાબિત થઈ શકશે.

પ્રશ્ન.

(૧) આપેલા પાયા ઉપર એક એવો ત્રિકોણ દોરો કે તેની બે બાજૂઓ આપેલી બે લીટીઓની બરોબર હોય.

(૨) પ્રતિજ્ઞામાં જે શરતો આપી છે તેનું કારણ શું ?

(૩) બન્ને વર્તુલો પરસ્પર છેદવા જોઇએજ એવું સિદ્ધ કરો.

(૪) સિદ્ધાંતમાં જે અનુક્રમે બાજૂઓ આપેલી લીટીની બરોબર છે, તેથી જૂદે અનુક્રમે બરોબર થાય એવો ત્રિકોણ દોરો.

(૫) આપેલી ત્રણ લીટીઓ માંહેલી क લીટી, अ અને ब ના સર્વાળા બરોબર હોય તો આકૃતિ કેવી થશે? તેમ હોય તો ત્રિકોણ થાય કે નહિ.

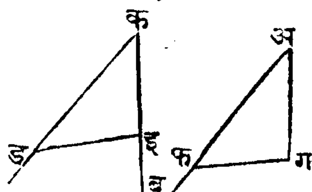
(૬) આ સિદ્ધાંત અને પહેલા સિદ્ધાંત વચ્ચે કેટલો સંબંધછે.

સિદ્ધાંત ૨૩. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:—એક આપેલી સીધી લીટીમાંના એક આપેલા બિંદુ પાસેથી એક એવો ખૂણો કરવો કે તે એક આપેલા ખૂણાની બરોબર થાય.

સાધન.

ધારો કે अब આપેલી સીધી લીટી છે, અને अ તેમાં આપેલું બિંદુ છે; અને डकइ આપેલો ખૂણો છે. તો अ બિંદુમાંથી એક એવી લીટી દોરવી છે કે તે લીટી આપેલી अब



લીટીની સાથે डकइ ખૂણા જેટલો એક ખૂણો કરે.

રચના.

कड, कइ લીટીઓમાં કોઇ પણ ड અને इ એવાં બે

બિંદુઓ લો; અને ઙઇ લીટી દોરો.

अव લીટીમાંથી अफ ભાગ कड જેટલો કાપો.(૧.૩)

અને अफ લીટી ઉપર એક अफग ત્રિકોણ એવો દોરો કે તેની अग, गफ બાજૂઓ અનુક્રમે कइ,इड ની બરોબર થાય, (૧. ૨૨)

ત્યારે फअग ખૂણો डकइ ખૂણાની બરોબર થશે.

સિદ્ધતા.

फअग, डकइ ત્રિકોણોમાં,

{ फअ બાજૂ डक ની બરોબર છે, (રચ.)
{ अग બાજૂ कइ ની બરોબર છે, (રચ.)
{ અને फग પાયો डइ ની બરોબર છે, (રચ.)

માટે, फअग ત્રિકોણ डकइ ની બરોબર છે. (૧.૮)

માટે, फअग ખૂણો પણ डकइ ખૂણાની બરોબર છે; એટલે अव લીટીના अ બિંદુમાંથી अग લીટી એવી દોરી કે તે આપેલી अव લીટીની સાથે આપેલા ખૂણા જેટલો ખૂણો કરે છે. कृ. कृ.

પ્રશ્નો.

(૧) એવું બતાવો કે ૧૧ મો સિદ્ધાંત આ સિદ્ધાંતનો એક પ્રકાર છે.

(૨) રચનામાં ૨૨ મા સિદ્ધાંતની મદદથી જે ત્રિકોણ દોર્યા છે તેની આખી આકૃતિ આપો.

(૩) બે આપેલા ખૂણાના સર્વાળા જેટલો એક ખૂણો કરો.

(૪) બે આપેલા ખૂણાની બાદબાકી જેટલો એક ખૂણો કરો.

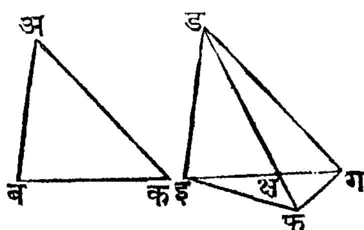
સિદ્ધાંત ૨૪ પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—જો બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજૂઓ

અનુક્રમે બીજાની બે બાજૂઓની બરોબર હોય, પણ તે સરખી બાજૂઓની વચ્ચેનો એકનો ખૂણો બીજાના ખૂણા કરતાં મ્હોટો હોય, તો જે ત્રિકોણમાં મ્હોટો ખૂણો છે તે ત્રિકોણનો પાયો (એટલે તે મ્હોટા ખૂણાની સામેની બાજૂ) બીજા ત્રિકોણના પાયા કરતાં મ્હોટો થશે.

સાધન.

अबक, डइफ બે ત્રિકોણો છે, જેમાંની बअ, अक બાજૂઓ અનુક્રમે इड, डफ બાજૂઓની બરોબર છે; પણ बअक ખૂણો इडफ ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે: ત્યારે



बक પાયો इफ કરતાં મ્હોટો થશે.

डइ અને डफ લીટીઓમાં, डइ લીટી डफ કરતાં મ્હોટી નથી એમ ધારો. (એ વિશે ટીપ જુઓ)

રચના.

डइ લીટીમાં ड બિંદુ આગળ डफ જે દિશાએ પડે છે તે તરફ इडग ખૂણો बअक ખૂણા બરોબર કરો (૧.૨૩)

डग ભાગ डफ અથવા अक બરોબર કરો. (૧. ૩)

इग, गफ સાંધો.

સિદ્ધતા.

बअक અને इडग ત્રિકોણોમાં,

बअ લીટી इड ની બરોબર છે, (પ્રતિ.)
અને अक લીટી डग ની બરોબર છે, (રચ.)
અને અંતર્ખૂણો बअक અન્તર્ખૂણા इडगની બરોબર છે. (રચ.)

માટે, अबक त्रिકોણ સર્વ પ્રકારે इडग ત્રિકોણની બરોબર છે. (૧. ૪)

અને, તેથી बक પાયો इग પાયાની બરોબર છે.

વળી फडग ત્રિકોણમાં,

डग લીટી डफ ની બરોબર છે.

માટે डफग ખૂણો डगफ ખૂણાની બરોબર છે.(૧.૫)

પણ डगफ ખૂણો તો इगफ ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે.

માટે डफग ખૂણો પણ इगफ ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે;

ત્યારે इफग ખૂણો તો इगफ ખૂણા કરતાં ઘણો મ્હોટો થયો.

માટે इग બાજૂ इफ બાજૂ કરતાં મ્હોટી થઇ (૧. ૧૯)

પણ इग તો बक ની બરોબર સાબિત કીધી છે;

માટે बक પાયો इफ પાયા કરતાં મ્હોટો છે.

માટે જો બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજૂઓ ઇ૦પ્ર. સિ.

ટીપઃ—(૧) ઉપલી સિદ્ધતામાં એવી શરત કીધી છે કે डइ લીટી डफ કરતાં મ્હોટી નથી; એ શરત અગત્યની છે, અને જો એ શરત પહેલાંથી કીધી ન હોય તો રચનામાં ત્રણ જૂદી જૂદી આકૃતિઓ થઇ શકે; કારણ કે फ બિંદુ इग લીટી ઉપરજ પડે, અથવા તે લીટીની ઉપરની બાજૂએ પડે, અથવા તેની નીચેની બાજૂએ પડે. આ આકૃતિમાં फ બિંદુ इग, લીટીની નીચેજ પડે છે તેનું કારણ ઉપલી શરત છે. ત્યારે હવે એ સિદ્ધ કરવાનું રહ્યું કે જો डइ લીટી डफ કરતાં મ્હોટી ન હોય તો फ બિંદુ इग લીટીની નીચેજ પડશે.

કારણ કે ધારો કે इग, डफ લીટીઓ क्ष બિંદુમાં છેદેછે;

હવે डइ લીટી डफ કરતાં મ્હોટી નથી,

માટે डइ લીટી डग કરતાં પણ મ્હોટી નથી;

માટે डगइ ખૂણો डइग ખૂણા કરતાં પણ મ્હોટો નથી.(૧.૧૮)

પણ, બહારનો ખૂણો **ડક્ષગ** માંહેલા ખૂણા **ડઇક્ષ** કરતાં મ્હોટો છે; (૧. ૧૬)

માટે **ડક્ષગ** ખૂણો **ડગક્ષ** ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે.

માટે **ડગ** લીટી **ડક્ષ** કરતાં મ્હોટી છે.

માટે **ફડ** લીટી પણ **ડક્ષ** કરતાં મ્હોટી છે.

એટલે **ફ** બિંદુ **ઇગ** લીટીની નીચે પડવું જોઇએ.

ટીપ:—(૨)જો **ડઇ** લીટી **ડફ** કરતાં મ્હોટી હોય તો એમ નહિ ધારવું કે આ સિદ્ધાંત થઇ શકે નહિ; કારણ કે જો તેમ હોય તો માત્ર આકૃતિરચનામાં ફેર થશે. તે એ કે **ડ** બિંદુ આગળ **બઅક** ખૂણાની બરોબર જે ખૂણો કરીશું તે જે દિશાએ **ડફ** લીટી પડેછે તે દિશાએ ન કરતાં જે દિશાએ **ડઇ** પડેછે તે દિશાએ **ડફ** લીટી ઉપર કરીશું.

પ્રશ્નો.

(૧) જો **ફ** બિંદુ **ઇગ** લીટીની નીચે પડે તો બતાવો કે **ઇડ** લીટી **ઇફ** લીટી કરતાં મ્હોટી હોય નહિ.

(૨) "**ડઇ** લીટી **ડફ** કરતાં મ્હોટી નથી" એ શબ્દોનો અર્થ શો ?

(૩) જો ઉપલી શરત ન લખી હોય તો જે ત્રણ પ્રકારો થાય તે જૂદા જૂદા સિદ્ધ કરો.

(૪) સ્થાનોપરીની રીતે ઉપલો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

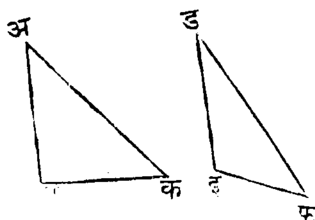
સિદ્ધાંત ૨૫. પ્રમેય

પ્રતિજ્ઞા:—જો બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજૂઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજૂઓનો બરોબર હોય, પણ એકનો પાયો બીજાના પાયા કરતાં મ્હોટો હોય, તો મ્હોટા પાયાવાળા ત્રિકોણની સરખી બાજૂઓ વચ્ચેનો

અન્તર્ખૂણો બીજા ત્રિકોણના અન્તર્ખૂણા કરતાં મ્હોટો થશે.

સાધન.

अबक અને डइफ બે એવા ત્રિકોણો છે કે એકની अब અને अक બાજૂઓ અનુક્રમે બીજાની डइ અને डफ બાજૂઓની બરોબર છે; પણ बक પાયો इफ પાયા કરતાં મ્હોટો છે,



તો बअक ખૂણો इडफ ખૂણા કરતાં મ્હોટો થશે.

સિદ્ધતા.

કેમકે, જો बअक ખૂણો इडफ ખૂણા કરતાં મ્હોટો ન હોય તો તે इडफ ની બરોબર હોવો જોઇએ અથવા તેથી ન્હાનો હોવો જોઇએ.

પણ बअक ખૂણો इडफ ની બરોબર તો નથીજ;

કારણ કે, તેમ હોય તો बक પાયો इफની બરોબર થાય.　　　　(૧. ૪.)

પણ તેમ નથી.　　　　(પ્રતિ.)

વળી, बअक ખૂણો इडफ ખૂણા કરતાં ન્હાનો પણ નથી;

કેમકે તેમ હોય તો बक પાયો इफ કરતાં ન્હાનો થાય.　　　　(૧. ૨૪.)

પણ તેમ નથી.　　　　(પ્રતિ.)

માટે बअक ખૂણો इडफની બરોબર નથી. અને તેથી ન્હાનો પણ નથી.

એટલે, बअक ખૂણો इडफ ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે. માટે જો બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજૂઓ ઈ૦ પ્ર. સિ.

ટીપઃ-આ સિદ્ધાંત ૨૪ માનો વ્યત્યાસ છે; અને એની સિદ્ધતા પણ ઉલટીજ છે; જેવો સંબંધ સિ. ૫ અને ૬ ને છે, તેવો સિ. ૨૪ અને ૨૫ ને છે. ૬ ઠ્ઠા સિદ્ધાંતની સમજણ જૂઓ.

ટીપઃ-જે પ્રમાણે અઢારમા અને ઓગણીસમા સિદ્ધાંતો પાંચમા અને છઠ્ઠાને મળતા છે, તેજ પ્રમાણે ચોવીસમા તથા પચીસમા, ચોથા અને આઠમાને મળતા છે. એકજ પ્રતિજ્ઞામાં ચોથા અને ચોવીસમા સિદ્ધાંતો નીચે પ્રમાણે લખાય.

જો બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજૂઓ બીજાની બે બાજૂઓની અનુક્રમે બરોબર હોય, તો જે પ્રમાણે એક ત્રિકોણની બાકીની બાજૂની સામેનો ખૂણો, બીજા ત્રિકોણની બાકીની બાજૂની સામેના ખૂણા કરતાં મ્હોટો, ન્હાનો અથવા તેની બરોબર હોય, તે પ્રમાણે એકની બાકીની બાજૂ, બીજાની બાકીની બાજૂ કરતાં મ્હોટી, ન્હાની અથવા તેની બરોબર થશે.

પ્રશ્ન

अबक ત્રિકોણનું **अ** શિરોબિંદુ, **बक** પાયાના **क्ष** મધ્યબિંદુ સાથે સાંધ્યું; તો **अब** લીટી **अक** કરતાં મ્હોટી અથવા ન્હાની હોય તે પ્રમાણે **अक्षब** ખૂણો પહોળો અથવા સાંકડો ખૂણો થશે.

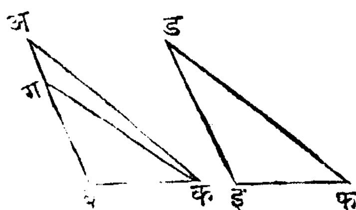
સિદ્ધાંત ૨૬. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ-જો એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના બે ખૂણાઓનો બરોબર હોય, અને (૧) તે સરખા ખૂણાઓની વચ્ચે રહેલી બાજૂ બન્ને ત્રિકોણમાં સરખી હોય, અથવા (૨) ગમે તે સરખા ખૂણાઓની સામેની એકેક બાજૂ સરખી હોય તો બાકીની બાજૂઓ અનુક્રમે એક બીજીની બરો-

બર થશે અને બાકી રહેલા ખૂણાઓ પણ બરોબર થશે.

સાધન.

પહેલો ભાગઃ— ધારો કે સરખા ખૂણાઓની વચ્ચે આપેલી બાજૂ બન્ને ત્રિકોણમાં સરખી છે.



ધારો કે, अबक, डइफ બે એવા ત્રિકોણો છે, કે अबक ખૂણો डइफની બરોબર છે, અને अकब ખૂણો डफइની બરોબર છે; અને बक બાજૂ इफની બરોબર છે.

તો अबक અને डइफ ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે એકેકની બરોબર થશે.

એટલે, अब બાજૂ डइની બરોબર થશે, અને अक બાજૂ डफની બરોબર થશે; અને बअक ખૂણો इडफ ખૂણાની બરોબર થશે.

કેમકે જો अब બાજૂ डइ ની બરોબર ન હોય, તો તેમાંની એક બીજી કરતાં મ્હોટી હોવી જોઇએ.

જો એમ બની શકે તો ધારો કે अब બાજૂ डइ કરતાં મ્હોટી છે,

રચના.

बअ લીટીમાંથી बग ભાગ इड બરોબર કાપો. (૧.૩)
અને गक લીટી દોરો. (સ્વી. ૧)

સિદ્ધતા.

गबक, डइफ ત્રિકોણોમાં,

{ ગવ બાજૂ ડઇની બરોબર છે. (રચ.)
અને વક, ઇફની બરોબર છે, (પ્રતિ.)
અને અન્તર્ખૂણો ગવક, ડઇફ અન્તર્ખૂણાની બરોબર છે,

માટે એ બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર છે. (૧.૪)
માટે गकव ખૂણો डफइ ખૂણાની બરોબર છે.

પણ अकव ખૂણો डफइ ખૂણાની બરોબર છે. (પ્રતિ.)
માટે गकव ખૂણો अकव ખૂણાની પણ બરોબર છે; (પ્ર. પ્ર. ૧.)
એક ભાગ તેના આખાની બરોબર;
એ અસંભવિત છે. (પ્ર. પ્ર. ૯)
માટે अव બાજૂ डइ કરતાં મ્હોટો નથી.
એજ પ્રમાણે સિદ્ધ થઇ શકે કે डइ બાજૂ अव કરતાં મ્હોટી નથી.

એટલે अव બાજૂ डइ ની બરોબર છે
માટે अवक અને डइफ ત્રિકોણોમાં,

{ अव બાજૂ डइની બરોબર છે, (સાબીત કીધું.)
અને वक બાજૂ इफની બરોબર છે, પ્રતિ.)
અને અન્તર્ખૂણા अवक, डइफ બરોબર છે.

માટે એ બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા છે. (૧.૪)
એટલે अक બાજૂ डफની બરોબર છે,
અને वअक ખૂણો इडफ ખૂણાની બરોબર છે
બીજો ભાગઃ-ધારોકે ત્રિકોણોમાં કોઇ પણ બે સરખા ખુણાની સામેના એકેક બાજૂ સરખી આપી છે.
ધારો કે अवक ખૂણો डइफ ખૂણાની બરોબરછે, અને अकव, डफइनी બરોબર છે, અને अव બાજૂ डइ બાજૂની બરોબર છે,

તો अबक અને डइफ ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા થશે.

એટલે बक બાજૂ इफ ની બરોબર, અને अक, डफ ની બરોબર થશે.

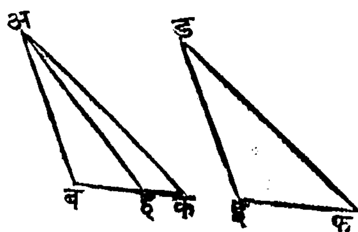
અને बअक ખૂણો इडफ ખૂણાની બરોબર થશે.

જો बक બાજૂ इफ બરોબર ન હોય, તો એમાંની એક બીજી કરતાં મ્હોટી હોવી જાઈએ.

જો એમ બની શકે તો, ધારો કે बक બાજૂ इफ કરતાં મ્હોટી છે.

રચના

बक માંથી बह ભાગ इफ જેટલો કાપો,(૧.૩.) અને अह લીટી દોરો તો, अबह, डइफ ત્રિકોણોમાં,



अब બાજૂ डइ ની બરોબર છે,
અને बह, इफ ની બરોબર છે,
અને અન્તર્ખૂણા अबह, डइफ સરખા છે;

માટે એ બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા છે. (૧. ૪.)

માટે अहब ખૂણો डफइ ખૂણાની બરોબર છે.

પણ डफइ ખૂણો તો अकब ખૂણાની બરોબર છે. (પ્રતિ.)

માટે अहब ખૂણો अकब ખૂણાની બરોબર છે.(પ્ર.૧)

એટલે अकह ત્રિકોણનો એક બહારનો ખૂણો તે ત્રિકોણના અંદરના સામેના ખૂણાના બરોબર છે, એ અશક્ય છે. (૧. ૧૬)

માટે बक બાજૂ इफ કરતાં મ્હોટી નથી;

તેમજ इफ, बक કરતાં મ્હોટી નથી એમ સાબિત થઇ શકે;

માટે એ બે બાજૂઓ સરખી છે.

ત્યારે अबक, डइफ ત્રિકોણોમાં,

{ अब બાજૂ डइ ની બરોબર છે,
અને बक, इफ ની બરોબર છે,
અને अबक, डइफ અન્તર્ખૂણા સરખા છે;

માટે એ બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા છે. (૧.૪)

માટે अक બાજૂ डफ ની બરોબર છે,

અને बअक ખૂણો इडफ ખૂણાની બરોબર છે.

માટે જો એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ ઇ૦ પ્ર. સિ.

ટીપ (૧):–બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર એટલે ત્રણે બાજૂઓ પણ અનુક્રમે સરખી અને ત્રણે ખૂણાઓ પણ અનુક્રમે સરખા કયારે હોય તે જોવું જોઇએ:—

(૧) સિદ્ધાંત ૪ પ્રમાણે; એટલે બન્ને ત્રિકોણની બે બાજૂઓ અને અન્તર્ખૂણા સરખા હોય તો,

(૨) સિદ્ધાંત ૮ પ્રમાણે; એટલે બન્ને ત્રિકોણોની ત્રણ બાજૂઓ અનુક્રમે સરખી હોય તો,

(૩) સિદ્ધાંત ૨૬ પ્રમાણે; એટલે બબ્બે ખૂણા સરખા હોય અને

(ક) તે સરખા ખૂણાઓની વચ્ચે આવેલી બાજૂઓ સરખી હોય,

અથવા (ખ) બે સરખા ખૂણાની સામેની બે બાજૂઓ સરખી હોય તો.

એટલે ઘણું કરીને છ પરિમિતો (ત્રણ બાજૂ અને ત્રણ ખૂણા)-માંથી ત્રણ સરખાં આપ્યાં હોય તો બીજાં ત્રણ સરખાં થશે.

પણ નીચે લખેલા બે પ્રકારો એવા છે કે તેમાં ત્રણ પરિમિતો સરખાં આપેલાં છતાં બીજાં ત્રણ અવશ્ય સરખાંજ હોવાં જોઇએ એમ નથી.

(૧) જો એક ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજાના ત્રણ ખૂણાઓની બરોબર હોય.

(૨) જો એક ત્રિકોણની બે બાજૂઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજૂઓની બરોબર હોય, અને અન્તર્ખૂણા નહિ, પણ કોઇ બીજા બે ખૂણા બરોબર હોય.

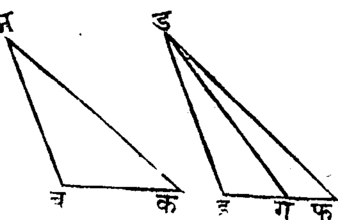
આ ૭ પરિમિતોમાંથી ત્રણ સરખાં આપ્યાં હોય, ને તે ઉપરથી બાકીનાં ત્રણ સરખાં સિદ્ધ કરવાં હોય તો ઉપર બતાવ્યા પ્રમાણે ૭ પ્રકાર થાય; તેમાંના ચાર ખરા છે. (સિદ્ધાંત ૪–૮–૨૬ ના બે ભાગ); અને બે અવશ્ય ખરા નથી; એટલે તે બે પ્રકારોમાં બાકીનાં ત્રણ પરિમિતો સરખાં થાય કિંવા નએ થાય; અને તે બે પ્રકારો ઉપર લખ્યા તે છે.

સર્વ પ્રકારે સરખા ત્રિકોણો હોય ત્યારે તે ત્રિકોણો સ્થાનોપરી થઈ શકે; માટે તેઓનું ક્ષેત્રફળ પણ સરખુંજ થાય.

ટીપ (૨):–ઉપર જે બે પ્રકારો બાદ કીધા છે તેમાંના બીજાને માટે એક નવી શર્ત વધારિયે તો ત્રિકોણો સરખા થશે.

તે શર્ત શી છે તે નીચેનો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરવાથી જણાશે.

જો બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજૂઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજૂઓની બરોબર હોય, અને બરોબર બાજૂઓની એક જોડની સામેના ખૂણાઓ બરોબર હોય, તો બીજી બરોબર બાજૂની સામેના ખૂણાઓ બરોબર અથવા ન્યૂનતાપૂરક થશે.



ધારો કે **अब=डइ**
અને **अक=डफ**,
અને ∠**अबक**=∠**डइफ**;
તો ∠**क** અને ∠**फ** ન્યૂનતાપૂરક થશે.

હવે જો ∠**अ**=∠**ड** હોય, તો તો ∠**क**=∠**फ** થશે. અને ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા થશે.

પણ જો ∠**अ**, ∠**ड**ની બરોબર ન હોય તો ધારો કે **ड** મ્હોટો છે;
તેમાંથી **इडग** ભાગ ∠**अ** બરોબર કરો (૧.૨ ૩.)
તો ∠**अ**=**इडग** (રચ.) અને ∠**ब**=**इ** (પ્રતિ.)
અને **अब**=**डइ** (પ્રતિ.)
માટે (૧. ૨૬) **अबक** ત્રિકોણ સર્વ પ્રકારે **डइग** ત્રિકોણની બરોબર છે.

∴∠**क**=**डगइ**, અને **अक**=**डग**;

પણ **अक**=**डफ** (પ્રતિ॰).∴**डग**=**डफ**.∴∠**डगफ**=∠**फ**.
પણ **ग** આગળના બે ખૂણા એકેકના ન્યૂનતાપૂરક છે. (૧.૧૩)
અને તેમાંનો એક=∠**क**, અને બીજો=∠**फ**
∴∠**क** અને ∠**फ** ન્યૂનતાપૂરક છે. **प्र. सि.**

ટીપ ૩ :–માટે જો બબે બાજૂઓ અનુક્રમે સરખી હોય અને એક જોડની સામેના ખૂણા સરખા હોય તો,

(૧) બાકીની સરખી બાજૂની સામેના ખૂણાઓમાંનો એક કાટખૂણ હોય અથવા

(૨) તે બાજૂઓની સામેના ખૂણા બન્ને સાંકડા હોય અથવા

(૩) તે બાજૂઓની સામેના ખૂણા બન્ને પહોળા હોય તો બન્ને ત્રિકોણો સરખાજ થશે. કારણ, જો એક કાટખૂણુ હોય તો તેના સરખો તેમજ તેનો ન્યૂનતાપૂરક પણ કાટખૂણુજ; માટે તે રહેલા ખૂણા સરખાજ થયા; માટે ત્રિકોણો પણ સરખાજ.

જો બન્ને પહોળા અથવા સાંકડા હોય તો તો એકેકના ન્યૂનતાપૂરક તો થઇ શકે નહિ; માટે તે સરખાજ હોવા જોઇએ; એટલે ત્રિકોણો પણ સરખાજ થયા.

પ્રશ્ન.

(૧) બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા ક્યારે ક્યારે હોય ?

(૨) જો બે ત્રિકોણોમાં બબે બાજૂઓ બરોબર હોય, અને એક જોડની સામેના ખૂણા બરાબર હોય, તો ત્રિકોણો બરોબર ક્યારે થાય, અને ક્યારે ન થાય ?

(૩) બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર હોય તો તેઓનું ક્ષેત્રફળ બરોબર હોય કે નહિ ? જો બે ત્રિકોણોનું ક્ષેત્રફળ સરખું હોય તો તે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર છે કે નહિ ?

(૪) આ સિદ્ધાંતનો પુરાવો કેવા પ્રકારનો છે ? એને મળતો પુરાવો આગળ કયા સિદ્ધાંતોમાં આવી ગયો છે ?

પહેલા ૨૬ સિદ્ધાંતો ઉપરથી થતા પ્રશ્નો.

૧. પાંચમા સિદ્ધાંતમાં ધારો કે **फक**ઃઅને **बग**ઃઃલીટીઓ **ह** બિંદુમાં છેદે છે; તો **फह=गह.**

૨. **अब**ના પાયાની એકજ દિશાએ **अबक, अबड** ત્રિકોણો છે; અને **अक=बड** છે, અને **अड=बक** છે; જો **अड, बक** લીટીઓ **इ** બિંદુમાં છેદે તો **अइब** ત્રિકોણ સમદ્વિબાજૂ થશે.

૩. જો બે કાટખૂણુ ત્રિકોણોમાં એકનો કર્ણ તથા એક

બાજૂ અનુક્રમે બીજાના કર્ણ તથા એક બાજૂની બરોબર હોય તો ત્રિકોણો સરખાજ થશે. (ઉલટો પુરાવો.)

૪. એક ત્રિકોણ એવો બનાવો કે જેની બે બાજૂઓ અને અન્તર્ખૂણો આપેલી બે લીટી અને એક ખૂણાની અનુક્રમે બરોબર હોય.

૫. એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણના પાયાના છેડાના બિંદુઓ-માંથી સામી બાજૂ ઉપર લંબ દોરિયે તો તે સરખા થશે.

૬. એક ખૂણાને દુભાગનારી લીટીનું કોઇ પણ બિંદુ તે ખૂણાની બાજૂઓથી સમાન્તર છે.

૭. એક લીટીના મધ્યબિંદુમાંથી તેને છેદે એવી બીજી લીટી દોરી; અને પહેલી લીટીના છેડાના બે બિંદુઓમાંથી તે બીજી લીટી ઉપર લંબ દોરીશું તો તે સરખા થશે.

૮. એક લીટીની એકજ દિશાએ બે બિંદુઓ આપેલાં છે, તેમાંથી બે લીટીઓ એવી દોરો કે આપેલી લીટીને એકજ બિંદુમાં મળે અને તેની સાથે સરખા ખૂણા કરે.

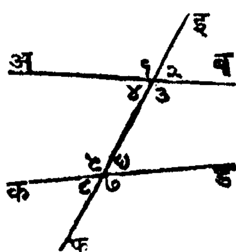
૯. એક આપેલી લીટીમાં એક એવું બિંદુ શોધી કહાડો કે બે એકેકને છેદતી લીટીઓથી સમાન્તરે હોય. એમ કરવું કયારે અસંભવિત છે?

૧૦. એક આપેલા બિંદુમાંથી એવી લીટી દોરો કે તેના ઉપર બે આપેલાં બિંદુઓમાંથી લંબ દોરિયે તે સરખા થાય. એમ કરવું ક્યારે અસંભવિત છે?

આવતા સિદ્ધાંતોની સમજણ.

હવે પછી સિદ્ધાંતો મુખ્ય કરીને સમાન્તર લીટીઓને લગતા તથા સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણને લગતા આવશે. એ બન્નેની વ્યાખ્યાઓ તો વ્યાખ્યા ૩૫-૩૬ મા આવી ગઇ છે,

જ્યારે એક લીટી, જેવી કે **इफ** બે સીધી લીટીઓ, જેવી કે **अब** અને **कड**, ની ઉપર પડે છે, ત્યારે આકૃતિમાં બતાવ્યા છે તે પ્રમાણે આઠ ખૂણાઓ થઈ શકે. એ ખૂણાઓનાં જૂદાં જૂદાં નામો આપવામાં આવ્યાં છે તે યાદ રાખવાં.



૧, ૨, ૭, ૮ ખૂણા **બહારના** ખૂણા કહેવાય. છે.

૩, ૪, ૫, ૬ ખૂણા **માંહેના** ખૂણા કહેવાય છે.

૪ અને ૬ ખૂણા એકેકના **વ્યુત્ક્રમખૂણા** કહેવાય છે, તેમજ ૩ અને ૫ ખૂણા પણ એકેકના **વ્યુત્ક્રમખૂણા.**

૨ અને ૬ સરખાવિયે તો ૨ ને બહારનો અને ૬ ને **તેજ દિશા ઉપરનો માંહેનો સામેનો** ખૂણો કહે છે. ,તેજ સંબંધ ૧ અને ૫ તથા ૪ અને ૮ તથા ૩ અને ૭ વચ્ચે છે. એટલે ૧ બહારનો ખૂણો અને ૫ તેજ દિશા ઉપરનો માંહેનો સામેનો ખૂણો; ઇત્યા.

સમાન્તર લીટીઓને લગતા સિદ્ધાંતોનો મુખ્ય આધાર ૧૨ મા પ્રત્યક્ષપ્રમાણ ઉપર રહેલો છે, તે ટીકા સહીત બરોબર સમજવું.

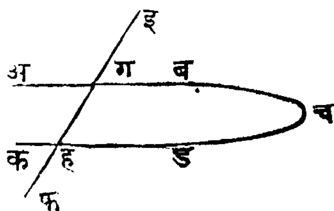
ઉપલી આકૃતિમાં ૩ અને ૬ ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા કરતાં ઓછા લાગે છે; અને તેથી **ब** અને **ड** છેડા લંબાવીશું તો બન્ને લીટીઓ મળશે; તેથી ઉલટું ૪ અને ૫ ખૂણા બે કાટખૂણા કરતાં વધારે છે, માટે **अ** અને **क** એકેકથી દૂર દૂર જતા થશે.

સિદ્ધાંત ૨૭ પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીઓ ઉપર પડીને વ્યુત્ક્રમખૂણાઓ બરોબર કરે, તો તે બે લીટીઓ સમાન્તર થશે.

સાધન.

ધારો કે इफ સીધી લીટી अब અને कड સીધા લીટીઓને ग અને ह બિંદુઓમાં એવી રીતે છેદે છે કે વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ अगह અને गहड એકેકની બરોબર છે,



તો अब અને कड સમાન્તર થશે.

સિદ્ધતા.

જો अब અને कड સમાન્તર ન હોય, તો એ લીટીઓ લંબાવતાં ब અને ड તરફ, અથવા अ અને क તરફ મળવી જોઈએ.

જો એમ બની શકે તો ધારો કે એ લીટીઓ ब અને ड તરફ લંબાવતાં च બિંદુમાં મળે છે.

ત્યારે चगह એક ત્રિકોણ થયો, જેની બે બાજૂઓ चग અને चह છે, અને જેનો પાયો गह છે.

હવે चग બાજૂ अ બિંદુ સૂધી લંબાવી છે; માટે બહારનો ખૂણો अगह માંહેના સામેના ખૂણા गहच કરતાં મ્હોટો છે. (૧.૧૬)

પણ એ બે ખૂણા તો સરખા આપેલા છે, (પ્રતિ.) એટલે, એ બે ખૂણા ન્હાના મ્હોટા પણ છે અને વળી સરખા પણ છે. એ અસંભવિત છે.

માટે अब અને कड લીટીઓ ब અને ड તરફ લંબાવતાં મળી શકશે નહિ.

એમજ એમ પણ સિદ્ધ થઇ શકે, કે अ અને क તરફ પણ લંબાવતાં મળશે નહિ.

માટે એ બે લીટીઓ સમાન્તર છે.

માટે જો એક સીધી લીટી ઇ૦ प्र. सि.

પ્રશ્ન.

(૧) अ અને क તરફથી લીટીઓ મળે એ અસંભવિત છે એવું બતાવો.

(૨) જો જૂદી જૂદી બાજૂ ઉપરના બહારના બે ખૂણાઓ સરખા હોય તો લીટીઓ સમાન્તર થશે.

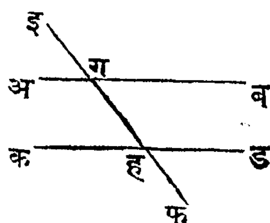
(૩) આ સિદ્ધાંતનો પુરાવો કેવી જાતનો છે? અને કયા કયા સિદ્ધાંતોમાં એવો પુરાવો આવી ગયો છે?

સિદ્ધાંત ૨૮ પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીઓ ઉપર પડીને (૧) બહારનો એક ખૂણો તે લીટીની તેજ દિશા તરફના માંહેના સામેના ખૂણાની બરોબર કરે; અથવા (૨) તે લીટીની એકજ બાજૂના બે માંહેના ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા બરાબર કરે, તો તે બે લીટીઓ સમાન્તર થશે.

સાધન.

ધારો કે इफ સીધી લીટી, अब અને कड સીધી લીટીઓને ग અને ह બિંદુઓમાં છેદે છે; અને



(૧) બહારનો ખૂણો इगब તેજ બાજૂ ઉપરના માંહેના સામેના ખૂણા गहड ની બરોબર છે;

તો अब અને कड સમાન્તર થશે.

અથવા (૨) इफ લીટીની એકજ બાજૂના બે માંહેના ખૂણા बगह અને गहड મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે, તો अब અને कड સમાન્તર થશે.

સિદ્ધતા.

इगब ખૂણો गहड ખૂણાની બરોબર છે, (પ્રતિ.)

પણ इगब ખૂણો સામસામેના ખૂણા अगह ની બરોબર છે.

માટે अगह ખૂણો गहड ખૂણાની બરોબર છે.(પ્ર.પ્ર.૧)
પણ એ તો વ્યુત્ક્રમખૂણાઓ છે;

માટે अब અને कड લીટીઓ સમાન્તરછે. (૧ ૨૭)

(૨) बगह અને गहड ખૂણાઓ મળીને બે કાટ-ખૂણા બરાબર છે

પણ પાસપાસેના ખૂણાઓ बगह અને अगह મળીને પણ બે કાટખૂણાની બરોબર છે. (૧. ૧૩.)

માટે बगह અને अगह ખૂણા बगह અને गहड ખૂણાની બરોબર થયા.

તેમાંથી સાધારણ ખૂણો बगह કહાડી લો.

તો બાકીનો ખૂણો अगह તે બાકીના ખૂણા गहड ની બરોબર થયો.

પણ એ તો વ્યુત્ક્રમખૂણાઓ છે.

માટે अब અને कड લીટીઓ સમાન્તર છે. (૧. ૨૭.)

માટે જો એક સીધી લીટી ઈ૦ प्र. सि.

ટીકાઃ—આ સિદ્ધાંત ઉપરથી એવું દેખાય છે, કે જો बग લીટીથી बगह ખૂણો गहड ખૂણાના ન્યૂનતાપૂરક ખૂણાની બરોબર થાય, તો बग લીટી हड ને સમાન્તર થશે. બારમા પ્રત્યક્ષ પ્રમાણમાં એવું ધારેલું છે, કે એક લીટીથી गह ની સાથે गडह ની ન્યૂનતાપૂરક ખૂણાના કરતાં ન્હાનો ખૂણો થાય, તો તે લીટી हड ને સમાન્તર થશે નહિ; અને તેથી જો લંબાવીએ તો તેને મળશે. માટે ખરેખરૂં પ્રત્યક્ષપ્રમાણ તો એજ કે, બે સીધી લીટીઓ જેઓ અરસ્પરસને છેદે છે તેઓ બન્ને એકજ સીધી લીટીની સાથે સમાન્તર થઈ શકતી નથી.

બારમું પ્રત્યક્ષપ્રમાણ ૨૯ મા સિદ્ધાંતને માટે અગત્યનું છે;

પણ એ પ્ર. પ્ર. ખરેખરૂં પ્રત્યક્ષ નથી માટે એ સિદ્ધાંત એ પ્રમાણના આધાર વગર સિદ્ધ કરવાને ઘણાએક પ્રયત્નો થયાં છે; પણ તેમાં કોઇ પણ એવું નથી કે એ પ્ર. પ્ર. વાપરવાને જે હરકત લાગે છે તેથી ઓછી હરકત તેને લાગે.

પ્રશ્ન.

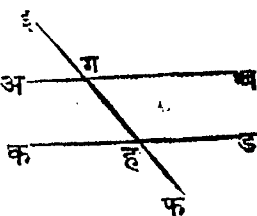
(૧) **कहफ** અને **अगह** ખૂણા બરોબર છે; તો લીટીઓ સમાન્તર થશે,

(૨) **अगह** અને **गहक** મળી બે કાટખૂણા બરોબર છે; તો લીટીઓ સમાન્તર થશે.

(૩) જે લીટીઓ એકજ સીધી લીટીને લંબ છે તે એકેકને સમાન્તર છે.

સિદ્ધાંત ૨૯ પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ-જો એક સીધી લીટી બે સમાન્તર સીધી લીટીઓ ઉપર પડે તો તે વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ એક બીજાની બરોબર કરશે; અને બહારનો એક ખૂણો તે લીટીની તેજ દિશા તરફના માંહેના સામેના ખૂણાની બરોબર કરશે; અને તે લીટીની એકજ બાજૂના બે માંહેના ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા બરોબર કરશે.



સાધન

ધારો કે इफ સીધી લીટી બે સમાન્તર સીધી લીટીઓ अब અને कड ઉપર પડે છે.

તો (૧) વ્યુત્ક્રમખૂણાઓ अगह, गहड એક બીજાની બરોબર થશે.

(૨) બહારનો ખૂણો इगब માંહેના એકજ તરફના સામેના ખૂણા गहडની બરોબર થશે;

(૩) એકજ તરફના બે માંહેના ખૂણાઓ બગઈ, ગઈડ મળીને બે કાટખૂણા બરોબર થશે.

સિદ્ધતા.

(૧) જો અગઈ ખૂણો ગઈડ ખૂણાની બરોબર નહોય, તો એ બેમાંનો એક બીજા કરતાં મ્હોટો હોવો જોઇએ.

જો એમ બની શકે તો ધારો કે અગઈ ખૂણો ગઈડ કરતાં મ્હોટો છે.

એ દરેકમાં બગઈ ખૂણો ઉમેરો;

ત્યારે અગઈ અને બગઈ ખૂણા મળીને બગઈઅને ગઈડ ખૂણા કરતાં મ્હોટા થયા.

પણ પાસ પાસેના ખૂણા અગઈ અને બગઈ તો બે મળીને બે કાટખૂણાની બરોબર છે;

માટે, બગઈ અને ગઈડ ખૂણા તો બે મળીને બે કાટખૂણા કરતાં ન્હાના થયા;

માટે અબ અને કડ લીટીઓ બ અને ડ તરફ લંબાવતાં મળવી જોઇએ; (પ્ર. પ્ર. ૧૨)

પણ એ લીટીઓ તો મળેજ નહિ; કેમકે તેઓ સમાન્તર છે.

માટે અગઈ ખૂણો ગઈડ કરતાં મ્હોટો નથી; તેમજ ગઈડ ખૂણો અગઈ કરતાં મ્હોટો નથી એ સિદ્ધ થશે,

એટલે વ્યુત્ક્રમખૂણાઓ બરોબરછે.

(૨) અગઈ ખૂણો સામસામેના ખૂણા ઇગબની બરોબર છે; (૧. ૧૫)

પણ अगह ખૂણો તો गहड ખૂણાની બરોબર છે;
(સિદ્ધ કીધું.)

માટે બહારનો ખૂણો इगब માંહેના સામેના ખૂણા गहड ની બરોબર થયો.

(૩) **इगब ખૂણો गहड ખૂણાની બરોબર છે;**
(સિદ્ધ કીધું.)

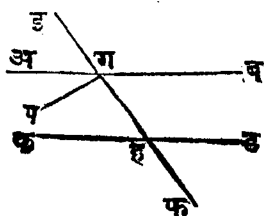
એ દરેકમાં बगह ખૂણો ઉમેરો;

ત્યારે इगब, बगह ખૂણા बगह, गहड ખૂણાની બરો બર થયા; પણ પાસપાસેના ખૂણા इगब, बगह તો બે મળીને બે કાટખૂણાની બરોબર છે; (૧. ૧૩.)
માટે, માંહેના બે ખૂણા बगह, गहड પણ બે મળીને બે કાટખૂણાની બરોબર છે.

માટે, જો એક સીધી લીટી બે સમાન્તર સાધી લીટીઓ ઉપર પડે, ઈ૦ **प्र. सि.**

ટીપ:—આ સિદ્ધાંતનો આધાર યુકિલડના બારમા પ્ર. પ્ર. ઉપર રહેલો છે; માટે સમાન્તર લીટીઓના ગુણોનો આધાર તે ઉપર છે. પણ તે પ્ર. પ્ર. સમજવામાં સહેલું નથી; અને વળી ખરેખરૂં પ્રત્યક્ષ પણ નથી. માટે તે પ્ર. પ્ર. નો આધાર ન લેતાં ઉપલો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરવાને ત્રિસ યત્નો થયાં છે; પણ તેમાંની કોઈપણ રીતે મુસ્કેલી બિલકુલ દૂર થતી નથી. તોપણ સૌમાં ઓછી અડચણવાળી રીત "પ્લેફેર" ના પ્રત્યક્ષ પ્રમાણની છે; તે નીચે આપી છે:—

પ્ર. પ્ર. " જો બે લીટી એકેકને છેદે તો તે બન્ને એકજ સીધી લીટીને સમાન્તર હોઈ શકે નહિ " આ પ્ર. પ્ર. મુસ્કલ નથી; એમાં જે કહ્યું છે તે ઘણું કરીને પ્રત્યક્ષજ છે. આ ઉપરથી ૨૯મો સિદ્ધાંત નીચે પ્રમાણે સિદ્ધ થાય છે:—



(૧) **अब** અને **कड** આપેલી સમાન્તર લીટીઓ છે; તો **अगह** ખૂણો=**गहड** થશે. જો તેમ ન હોય તો ધારો કે **अगह** મ્હોટોછે;તેમાંથી **पगह** ખૂણો **गहड** બરોબર કાપો. હવે; **पगह=गहड**; માટે **पग** લીટી **कड** ને સમાન્તર છે; (૧. ૨૭) પણ **अग** લીટી પણ **कड** ને સમાન્તર આપેલી છે. એ ઉપલા પ્ર. પ્ર. ની વિરૂદ્ધ છે. માટે **अगह** ખૂણો **गहड** ખૂણા કરતાં મ્હોટો નથી; તેમજ ન્હાનો પણ નથી; એટલે સરખો છે.

(૨) અને (૩) ઉપરના સિદ્ધાંત પ્રમાણેજ સિદ્ધ થશે.

ઉપલા ત્રણ સિદ્ધાંતો ઉપરથી કેટલાક સહેલા ઉપસિદ્ધાંતો નિકળી શકેછે; તેઓની સિદ્ધતા પ્રત્યક્ષ છે; પણ તે ઉપસિદ્ધાંતો કાંઈ પુરાવામાં વપરાતા નથી; તેઓ નીચે પ્રમાણે છેઃ–

(૧) બે સમાન્તર લીટીઓ માંહેલી એક ઉપર જો એક સીધી લીટી લંબ હોય તો તેને લંબાવતાં તે બીજી લીટી ઉપર લંબ થશે.

(૨) બે સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે જે જૂદા જૂદા લંબોના ભાગો પડે છે તેઓ સરખાજ છે.

(૩) બે સમાન્તર સીધી લીટીઓમાંની દરેક ઉપર એકેક લંબ દોરી હોય તો તે બે લંબો એકજ લીટીમાં થશે; અથવા સમાન્તર થશે.

(૪) બે છેદનારી લીટીઓમાંની દરેક ઉપર એકેક લંબ દોરિયે તો તે લંબો સમાન્તર હોઈ શકે નહિ.

પ્રશ્ન.

(૧) **अगइ** અને **डहफ** ખૂણા સરખા છે એવું સિદ્ધ કરો.

(૨) बगह અને डहफ ખૂણા સરખા છે એવું સિદ્ધ કરો.

(૩) इगब અને डहफ મળીને બે કાટખૂણા બરોબર થશે.

(૪) ૨૯ માના ત્રણુ ભાગોના વ્યત્યાસ કયા સિદ્ધાંતોમાં સિદ્ધ થઇ ગયા છે, તે બતાવો.

૨૭–૨૮–૨૯ સિદ્ધાંતો ઉપર પ્રશ્ન.

(૧) બે લીટીઓ अब અને कड એક બીજીને इ બિંદુમાં દુભાગે છે; તો अक લીટી बड ને સમાન્તર થશે.

(૨) જે લીટીઓ એકજ લીટીને લંબ છે, તે લીટીઓ એકેકને સમાન્તર છે.

(૩) જો બે લીટીઓ અરસ્પરસ બીજી બે લીટીને સમાન્તર હોય તો પહેલી બે લીટીઓ વચ્ચેનો ખૂણો બીજી બેની વ-ચ્ચેના ખૂણાની બરોબર છે.

(૪) જો બે સમાન્તર લીટીઓ વચ્ચે બન્નેથી સરખે અન્તરે એક બિંદુ લઇને તેમાંથી બે લીટીઓ દોરિયે, તો તેથી સમાન્તર લીટીઓના જે બે ભાગ થશે તે સરખા થશે.

(૫) બે સીધી લીટીઓ એકેકને છેદે છે; તેઓ બીજી બે સીધી લીટીને અરસ્પરસ સમાન્તર છે; તો તેઓની વચ્ચેના ખૂણા બરોબર થશે.

(૬) એક ત્રિકોણુના એક શિરોબિંદુમાંથી તે ખૂણાને દુભાગનારી એક લીટી પાયા સુધી દોરી તો જે બિંદુમાં તે પાયાને છેદે છે તેમાંથી ત્રિકોણુની બાજૂઓને જે સમાન્તર લીટીઓ તેજ ત્રિકોણુમાં દોરીશું, તે બરોબર થશે.

(૭) બે સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે કોઇ પણુ સીધી લીટી દોરીને તેના મધ્યબિંદુમાંથી એક બીજી લીટી તે સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે દોરીશું, તો તે પણુ તે જ બિંદુમાં દુભાગાશે.

(૮) કોઇ ત્રિકોણના એક બહારના ખૂણાને દુભાગનારી લીટી એક બાજૂને સમાન્તર હોય તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજૂ થશે.

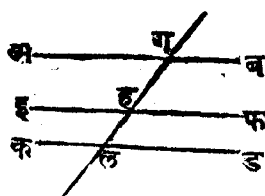
સિદ્ધાંત ૩૦. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ-જો બે સીધી લીટીઓ એકજ સીધી લીટીની સાથે સમાન્તર હોય, તો તેઓ એકેકને સમાન્તર થશે.

સાધન.

ધારો કે બે સીધી લીટીઓ अब, कड દરેક इफ ને સમાન્તર છે;

તો अब, कड ને સમાન્તર થશે.



સિદ્ધતા.

अब અને इफ સમાન્તર લીટીઓને गह કાપે છે,

માટે अगह ખૂણો તેના વ્યુત્ક્રમ ખૂણા गहफ ની બરોબર છે. (૧. ૨૯)

અને, इफ અને कड સમાન્તર લીટીઓને गहल છેદેછે,

માટે બહારનો ખૂણો गहफ માંહેના ખૂણા हलड ની બરોબર છે. (૧. ૨૯)

પણ ઉપર બતાવ્યું કે गहफ ખૂણો તો अगह ની બરોબર છે.

માટે अगह ખૂણો गलड ખૂણાની બરોબર છે. (પ્ર.પ્ર.૧)

અને એ ખૂણાઓ વ્યુત્ક્રમ છે;

માટે अब લીટી कड ને સમાન્તર છે. (૧. ૨૭)

માટે, જો બે સીધી લીટી ઇ૦ प्र. सि.

ટીપ:–૨૯ મા સિદ્ધાંતની ટીપમાં આપેલા " પ્લેફેર " ના પ્ર. પ્ર. થી આ સિદ્ધાંત તુરત થઇ શકે છે; કેમકે જો એ બે લીટીઓ સમાન્તર ન હોય તો મળવી જોઇએ; પણ જો મળે તો દરેક **इफ** લીટીને સમાન્તર હોય નહિ; (પ્ર. પ્ર.) જે પ્રતિજ્ઞાથી વિરૂદ્ધ છે.

વળી એ પણ જોવાનું છે કે આ સિદ્ધાંત એક રીતે બિલકુલ પ્રત્યક્ષ છે, કારણ કે જો **अब** અને **कड** લીટીઓ **इफ** લીટી જે તેઓની વચ્ચે આવેલી છે તેને મળી શકતીજ નથી (પ્રતિ.) તો તેઓ એકેકને પણ મળી શકેજ નહિ; એટલે સમાન્તરજ હોવી જોઇએ.

આકૃતિમાં **अब** અને **कड** લીટીઓને બે બાજૂએ દોરીને **इफ**ને વચમાં દોરી છે, પણ **इफ** લીટી એક છેડેથી દોરીને પણ સિદ્ધાંત થઇ શકે છે.

પ્રશ્ન.

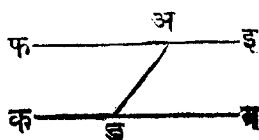
(૧) બે સમાન્તર લીટીમાંથી એકને છેદનારી લીટી બીજીને મળવીજ જોઇએ.

(૨) આકૃતિમાં આપેલી લીટીઓ જૂદી રીતે ગોઠવીને એજ સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

સિદ્ધાંત ૩૧. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:–એક આપેલા બિંદુમાંથી એક આપેલી સીધી લીટીને સમાન્તર એક સીધી લીટી દોરવી.

સાધન.



ધારો કે अ આપેલું બિંદુ છે. અને बक આપેલી સીધી લીટી છે; તો अ બિંદુમાંથી बक લીટીને સમાન્તર એક લીટી દોરવાની છે.

રચના.

बक લીટીમાં એક બિંદુ ड લો; અને अ, ड બિંદુઓ સાંધો.

डअ લીટીમાં अ બિંદુ આગળ डअइ ખૂણો अडक ખૂણાની બરોબર, अडनी સામી બાજૂએ બનાવો; (૧.૨૩)

અને इअ ને फ સુધી લંબાવો.

તો इफ લીટી कब ને સમાન્તર થશે.

સિદ્ધતા.

अड લીટી બે સીધી લીટીઓ इफ, बक ને મળે-છે, અને વ્યુત્ક્રમખૂણા इअड, अडक બરોબર કરે છે.

માટે इफ લીટી बक ને સમાન્તર છે. (૧. ૨૭.)

અને તે अ બિંદુમાંથી દોરી છે. कृ. कृ.

પ્રશ્ન.

(૧) **अ** બિંદુ આગળ **अडक** ખૂણાની બરોબર જે ખૂણો બનાવ્યો છે તે **अडक** નીજ દિશા તરફ બનાવ્યો હોય તો સિદ્ધાંત સિદ્ધ થાય કે નહિ ?

(૨) આપેલા બિંદુમાંથી એકજ સમાન્તર લીટી દોરાય કે વધારે ?

(૩) એક આપેલા બિંદુમાંથી એક એવી લીટી દોરો કે તે એક આપેલી લીટી સાથે એક આપેલા ખૂણા બરોબર ખૂણો કરે.

(૪) એક આપેલા બિંદુમાંથી એક એવી લીટી દોરો કે બે સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે આવેલો તેનો ભાગ એક આપેલી લીટીની બરોબર થાય; આ ક્યારે અશક્ય છે ?

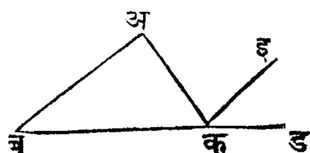
સિદ્ધાંત ૩૨ પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ– જો એક ત્રિકોણની એક બાજૂ લંબાવી તો બહારનો ખૂણો માંહેના અને સામેના બે ખૂણા-

ઓની બરોબર થશે; અને હરેક ત્રિકોણના ત્રણ માંહેના ખૂણાઓ મળી ને બે કાટખૂણા બરોબર થશે.

સાધન.

ધારો કે अबक આપેલો ત્રિકોણ છે; જેની એક बक બાજૂ ड બિંદુ સૂધી લંબાવી છે.



તો (૧) બહારનો ખૂણો अकड માંહેના સામેના ખૂણાઓ कअब, अबक ની બરોબર થશે.

અને (૨) માંહેના ત્રણ ખૂણાઓ अबक, बकअ, कअब મળીને બે કાટખુણા બરોબર થશે.

રચના.

क બિંદુમાંથી कइ લીટી बअ ને સમાન્તર દોરો. (૧. ૩૧)

સિદ્ધતા.

बअ લીટી कइ ને સમાન્તર છે, અને તેઓને अक મળે છે.

માટે, अकइ ખૂણો તેના વ્યુત્ક્રમખૂણા कअब ની બરોબર છે. (૧. ૨૯)

વળી बअ લીટી कइ ને સમાન્તર છે, અને बड તેઓને મળે છે,

માટે બહારનો ખૂણો इकड માંહેના સામેના ખૂણા अबक ની બરોબર છે; (૧. ૨૯)

માટે બહારનો આખો ખૂણો अकड બે માંહેના સામેના ખૂણા कअब, अबक ની બરોબર છે.

(૨)વળી, अकड खूणो कअब, अबक खूणानी બરોબર છે, (સિદ્ધ કીધું.)

તે દરેકમાં बकअ ખૂણો ઉમેરો;

તો बकअ, अकड ખૂણા મળીને ત્રણ ખૂણા बकअ कअब, अबक ની બરોબર થયા. (પ્ર. પ્ર. ૨)

પણ પાસપાસેના ખૂણા बकअ, अकड તો બે કાટખૂણા બરોબર છે, (૧. ૧૩)

માટે ત્રણ ખૂણા, बकअ, कअब, अबक મળીને પણ બે કાટખૂણાની બરોબર થયા.

માટે એક ત્રિકોણની ઇ૦ प्र. सि.

સહેલા ઉપસિદ્ધાંતો—(૧)જો બે ત્રિકોણમાં એકના બે ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજાના બે ખૂણાઓની બરોબર હોય તો એકનો બાકી રહેલો ત્રિજો ખૂણો બીજાના ત્રિજા ખૂણાની બરોબર થશે.

(૨) એક કાટખૂણ ત્રિકોણના બે સાંકડાખૂણા એક બીજાના કાટખૂણા થશે

(૩) એક કાટખૂણ સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણનો દરેક સરખો ખૂણો અર્ધ કાટખૂણ બરોબર છે.

(૪) જો એક ત્રિકોણનો એક ખૂણો બીજા બેના સર્વાળા બરોબર હોય તો તે ખૂણો કાટખૂણો હોવો જોઇએ.

(૫) એક ચતુષ્કોણાકૃતિના ચાર ખૂણાઓ મળીને ચાર કાટખૂણા બરોબર છે.

(૬) એક સમબાજૂ ત્રિકોણનો દરેક ખૂણો એક કાટ ખૂણાનો $\frac{2}{3}$ છે

પ્રશ્ન.

(૧) એક સાંકડખૂણ ત્રિકોણમાં કોઇપણ બે ખૂણા મળીને ત્રિજા કરતાં મ્હોટા હોવા જોઇએ.

(૨) એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણની એક બાજૂ લંબાવતાં જે ખૂણો થાય, તેને દુભાગનારી લીટી પાયાને સમાન્તર થશે.

(૩) ઉપલા સિદ્ધાંતનો બીજો ભાગ ફક્ત ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજૂને સમાન્તર લીટી દોરીને સિદ્ધ કરો.

(૪) એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણના પાયા ઉપરના ખૂણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ વચ્ચેનો ખૂણો તે પાયાને એક છેડેથી લંબાવતાં જે ખૂણો થાય તેની બરોબર થશે.

(૫) કોઇ પણ ત્રિકોણના પાયાને બન્ને છેડેથી લંબાવ્યો તો બહારના બે ખૂણાના સર્વાળામાંથી ટોચનો ખૂણો બાદ કરતાં બે કાટખૂણા બાકી રહેશે.

(૬) એક કાટખૂણ ત્રિકોણમાં કાટખૂણાના શિરોબિંદુથી એક લીટી સામેની બાજૂના મધ્યબિંદુ સૂધી દોરી હોય, તો તેથી બે સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણો થશે.

(૭) એક સમર્યાદ સીધી લીટીના એક છેડાથી તે લીટી લંબાવ્યા વિના, તે લીટી ઉપર એક લંબ દોરો.

(૮) એક કાટખૂણાના ત્રણ સરખા ભાગ કરો.

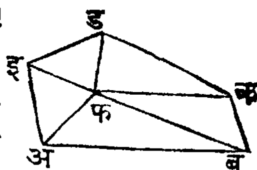
ઉપરનો સિદ્ધાંત ઘણોજ અગત્યનો છે; અને તેના ઉપરથી નિકળતા કેટલાક ઉપસિદ્ધાંતો અને તેને લગતા કેટલાક પ્રશ્નો ઉપર આપ્યા છે. પણ એ સિદ્ધાંત ઉપરથી બે ઉપસિદ્ધાંતો ઘણાજ અગત્યના નિકળે છે; અને તે ૩૨ મા સિદ્ધાંતના પહેલા અને બીજા ઉપસિદ્ધાંતને નામે પ્રખ્યાત છે. તેમનો ઉપયોગ ગણિતમાં વારંવાર થાય છે, માટે તેમની આકૃતિ, રચના, સિદ્ધતા, વગેરે નીચે અનુક્રમે આપ્યાં છે.

સિદ્ધાંત ૩૨ માનો ઉપસિદ્ધાંત પહેલો

કોઇ પણ સીધી લીટી આકૃતિના બધા માંહેના ખૂણામાં ચાર

કાટખૂણા ઉમેરિયે તો તે સર્વાળો આકૃતિની જેટલી બાજૂઓ હોય તેના બમણા કાટખૂણા બરોબર થાય.

ધારો કે **अबकडइ** એક સીધી લીટી આકૃતિ છે.



તેમાં એક **फ** બિંદુ લીધું; અને તેને આકૃતિના દરેક બિંદુ સાથે સાંધ્યું.

તો જેટલી બાજૂ આકૃતિની છે તેટલા તે આકૃતિમાં ત્રિ-કોણો થયા.

અને દરેક ત્રિકોણના બધા ખૂણાઓ મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે;

માટે એ બધા ત્રિકોણોના બધા ખૂણાઓનો સર્વાળો તે આકૃતિની જેટલી બાજૂઓ છે તેથી બેવડા કાટખૂણા જેટલો થયો.

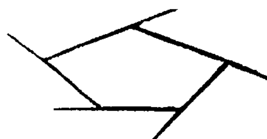
પણ એ ત્રિકોણોના બધા ખૂણાઓ લઇયે તો તો આ-કૃતિના બધા માંહેના ખૂણાઓ અને **फ** બિંદુ આગળના બધા ખૂણા થયા.

વળી **फ** બિંદુ આગળના બધા ખૂણાઓ મળીને ચાર કાટ-ખૂણા બરોબર છે. (૧. ૧૫. ઉપ.)

માટે આકૃતિના બધા માંહેના ખૂણા અને ચાર કાટખૂણા મળીને આકૃતિમાં જેટલી બાજૂઓ છે તેથી બેવડા કાટખૂણા ની બરોબર છે. **प्र. सि.**

સિદ્ધાંત ૩૨ માનો ઉપસિદ્ધાંત બીજો.

જો કોઈપણ સીધી લીટી આકૃતિની દરેક બાજૂ અનુક્રમે એકજ દિશા તરફ લંબાવિયે તો બહારના ખૂણાઓ સર્વ મળી ને ચાર કાટખૂણા બરોબર થશે.



દરેક શિરોબિંદુ આગળ માંહેનો ખૂણો અને બહારનો બન્ને મળીને બે કાટ ખૂણા બરોબરછે; (૧.૧૩)

માટે બધા માંહેના અને બધા બહારના ખૂણા મળીને આકૃતિની જેટલી બાજૂ છે તેથી બમણા કાટખૂણા બરોબર છે.

પણ માંહેના ખૂણાઓ અને ચાર કાટખૂણા મળીને પણ આકૃતિના બાજૂના બમણા કાટખૂણા બરોબર છે. (૧. ૩૨. ઉપ. ૧)

માટે માંહેના ખૂણાઓ તથા બહારના ખૂણાઓ મળીને માંહેના ખૂણાઓ તથા ચાર કાટખૂણાની બરોબર છે, (પ્ર. પ્ર. ૧)

માટે બહારના બધા ખૂણા મળીને ચાર કાટખૂણાની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૩) **પ્ર. સિ.**

ટીપઃ—આ ઉપરથી કોઇ પણ સીધી લીટી આકૃતિમાં બધા મળીને કેટલા કાટખૂણા થાય તે તુરત જણાશે; જેમકે તે આકૃતિને ૮ બાજૂઓ હોય તો તેના માંહેના ખૂણા બધા મળીને ૧૬−૪=૧૨ કાટખૂણા જેટલા થશે. વળી જો આપેલી આકૃતિ એવી હોય કે તેના બધા ખૂણા સરખાજ છે તો દરેક ખૂણાના મહત્ત્વનો નિશ્ચય થશે. જેમકે, ૮ બાજૂની આકૃતિના સર્વ ખૂણા સરખા હોય તો દરેકખૂણો $\frac{૧૨}{૮}$ એટલે $\frac{૩}{૨}$ કાટખૂણા બરોબર થવો જોઇએ.

વળી હરેક આકૃતિના ખૂણાઓનો સર્વાળો કાટખૂણાની એકી સંખ્યાઓની બરોબર છે; કેમકે બાજૂઓની સંખ્યાની બમણાઇ આવશ્યક બેકી છે. અને તેમાંથી ચાર બેકી સંખ્યા બાદ કીધી તો બાકી બેકી રહેશે.

વળી માંહેના ખૂણા બધા મળીને કેટલા કાટખૂણા બરોબર છે તે જાણવાથી તે આકૃતિની બાજૂઓની સંખ્યા માલમ

પડી શકેછે; કેમકે કાટખૂણાની સંખ્યામાં ચાર ઉમેરીને તેનું અર્ધ લેઇએ તો બાજૂઓની સંખ્યા આવે.

સિદ્ધાંત ૩૨ ના ઉપસિદ્ધાંતો ઉપર પ્રશ્ન.

(૧) એક સમકોણ અને સમબાજૂ ષટ્કોણના દરેક ખૂણાનું મહત્ત્વ કેટલું ?

(૨) એવાજ એક ષટ્કોણની એક બાજૂ લંબાવી તો બહારનો ખૂણે એક સમબાજૂ ત્રિકોણના ખૂણાની બરોબર થશે.

(૩) એક બહુકોણ આકૃતિની **ન** બાજૂઓ છે; અને તે આકૃતિના બધા ખૂણા સરખા છે; તો દરેક ખૂણાનું મહત્ત્વ કેટલું ?

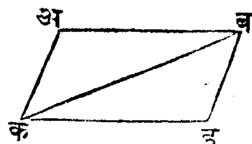
(૪) એક બહુકોણ આકૃતિની આંતરે આંતરેની બાજૂઓ લંબાવિયે તો જે બિંદુઓમાં તે બાજૂઓ છેદશે ત્યાંના બધા ખૂણાઓમાં આઠ કાટખૂણા ઉમેરિયે તો તે આકૃતિમાં જેટલી બાજૂઓ હોય તેથી બમણા કાટખૂણા બરોબર થશે.

સિદ્ધાંત ૩૩. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—બે સરખી અને સમાન્તર સીધી લીટીઓના એકજ તરફના છેડા સાંધનારી સીધી લીટીઓ પણ જાતે સરખી અને સમાન્તર થશે.

સાધન.

ધારો કે अब અને कड બે સરખી અને સમાન્તર સીધી લીટીઓ છે; અને ધારો કે તેઓને એકજ બાજૂએથી अक અને बड લીટીઓ સાંધે છે.



તો अक અને बड જાતે સરખી અને સમાન્તર થશે.

રચના.

બક લીટી દોરો.

સિદ્ધતા.

અ૨ અને કડ લીટીઓ સમાન્તર છે, અને બક લીટી મળે છે.

માટે વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ અબક, બકડ બરોબર છે. (૧. ૨૯)

હવે, અબક, ડકબ ત્રિકોણોમાં,

અબ લીટી કડની બરોબર છે. (પ્રતિજ્ઞા)
અને બક લીટી બન્ને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે
અને અબક ખૂણો બકડની બરોબર છે,

માટે એ બે ત્રિકોણ સર્વ પ્રકારે સરખા છે; (૧.૪)
એટલે, અક પાયો ડબ પાયાની બરોબર છે,
અને અકબ ખૂણો ડબક ખૂણાની બરોબર છે;
પણ એતો વ્યુત્ક્રમ ખૂણા છે;
માટે અક લીટી બડ ને સમાન્તર છે. (૧.૨૭)
અને તેઓ સરખી છે એમ પણ બતાવ્યું.
માટે, બે સરખી અને સમાન્તર ઇ૦ પ્ર. સિ.

પ્રશ્ન.

(૧) આ સિદ્ધાંતના બે ભાગ છે તે જૂદા જૂદા લખો અને સિદ્ધ કરો.

(૨ એક આપેલી સીધી લીટી ઉપર તેની એકજ બાજૂએ બે બહાર આપેલાં બિંદુઓમાંથી સરખી લંબ દોરી, તો તે બિંદુઓને સાંધનારી લીટી આપેલી લીટીને સમાન્તર થશે.

(૩) એક ત્રિકોણની બે બાજૂઓને દુભાગી; તો તે બે બિંદુઓ સાંધનારી લીટી પાયાને સમાન્તર થશે, અને પાયાથી અર્ધ થશે.

(૪) આ સિદ્ધાંતની પ્રતિજ્ઞામાં "એકજ તરફના બે છેડા" એવા શબ્દો લખ્યા છે તેનું કારણ શું ?

સિદ્ધાંત ૩૪ પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ-એક સમાન્તર બાજૂ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજૂઓ અરસ્પરસ બરોબર છે, તેમજ સામસામેના ખૂણાઓ પણ બરોબર છે; અને એક સમાન્તર બાજૂ ચતુષ્કોણને તેની કર્ણ લીટી દુભાગે છે.

સાધન.

ધારોકે अकडब એક સમાન્તર બાજૂ ચતુષ્કોણ છે.

અને बक તેની કર્ણ લીટી છે, તો એ આકૃતિની સામસામેની લીટીઓ તથા સામસામેના ખૂણા બરોબર થશે; અને बक કર્ણ લીટી તેને દુભાગશે.

अब લીટી कड ને સમાન્તર છે, અને તેઓને बक મળે છે,

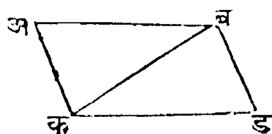
માટે વ્યુત્ક્રમ ખૂણા अबक, डकब બરોબર છે.(૧.૨૯)

વળી, अक અને बड-સમાન્તર છે, અને તેઓને बक મળે છે,

માટે વ્યુત્ક્રમ ખૂણા अकब, डबक બરોબર છે. (૧. ૨૯)

માટે, अबक, डकब ત્રિકોણોમાં,

અकब ખૂણો डबक ખૂણાની બરોબર છે.
અને अबक ખૂણો बकड ખૂણાની બરોબર છે;
અને સરખા ખૂણાએ



પાસેની બાજૂ बक સાધારણ છે;

માટે, अबक, डकब ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર છે;

(૧. ૨૬)

માટે अब લીટી डक નીબરોબર છે;અને अक, डबની બરોબર છે;

અને बअक ખૂણો कडब ખૂણાની બરોબર છે.

વળી, अबक ખૂણો डकब ખૂણાની બરોબર છે,

અને कबड ખૂણો बकअ ખૂણાની બરોબર છે,

માટે આખો ખૂણો अबड આખા ખૂણા डकअની બરોબર છે.

અને એવું સિદ્ધ કીધું કે अबक, डकब ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર છે.

માટે કર્ણ લીટી बक, अकडब સમાન્તર બાજૂ ચતુષ્કોણને દ્વિભાગે છે.

માટે એક સમાન્તર બાજૂ ચતુષ્કોણનીસામસામેની બાજૂઓ::૬૦ प्र. सि.

પ્રશ્ન.

(૧) એક સમાન્તર બાજૂ ચતુષ્કોણનો એક ખૂણો કાટખૂણો હોય તો તેના બધા ખૂણા કાટખૂણા થશે.

(૨) જો એક ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજૂઓ સરખી હોય તો તે સમાન્તર બાજૂ ચતુષ્કોણ થશે.

(૩) જો એક ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણા બરાબર હોય તો તે સમાન્તર બાજૂ ચતુષ્કોણ થશે.

(૪) જો એક ચતુષ્કોણની બાજૂઓ સરખી હોય ને એક ખૂણો કાટખૂણો હોય તો બધા ખૂણા કાટખૂણા થશે.

(૫) એક સમાન્તરબાજૂચતુષ્કોણની કર્ણો એકેકને દુભાગેછે.

(૬) જો એક ચતુષ્કોણની કર્ણો એકેકને દુભાગે તો તે ચતુષ્કોણ સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ હોવો જોઇએ.

(૭) જો એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની કર્ણો ખૂણાને દુભાગે તો તે સમબાજૂ ચતુષ્કોણ હોવો જોઇએ.

(૮) જો એક સમાન્તર બાજૂ ચતુષ્કોણની કર્ણો સરખી હોય તો તેના બધા ખૂણા કાટખૂણા થશે.

(૯) જો એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ કાટખૂણ નહોય તો તેની કર્ણો સરખી થાય નહિ

(૧૦) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની એક કર્ણના મધ્ય બિંદુમાંથી બે સામસામેની બાજૂઓ સૂધી એક લીટી દોરી તો તે લીટી તે બિંદુમાં દુભાગાશે.

(૧૧) જો બે સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણમાં એકની બે બાજૂઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજૂઓની બરોબર હોય, અને એકનો માંહેનો ખૂણો બીજાના માંહેના ખૂણાની બરોબર હોય, તો તે સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણો સર્વે પ્રકારે બરોબર થશે.

(૧૨) બે કાટખૂણ ચતુષ્કોણોમાં જો એકની બે પાસપાસેની બાજૂઓ બીજાની બે બાજૂઓની અનુક્રમે બરોબર હોય તો તે કાટખૂણ ચતુષ્કોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર થશે.

(૧૩) એક સમાન્તર બાજૂ ચતુષ્કોણમાં એક કર્ણ ઉપર સામેના બન્ને ખૂણાઓમાંથી લંબ દોરી તો તે લંબો બરોબર થશે.



પહેલા ૩૪ સિદ્ધાંતો ઊપર પ્રશ્નો.

(૧) એક ત્રિકોણનો પાયો બન્ને તરફ લંબાવિયે તો બહારના ખૂણાઓને દુભાગનારી લીટીઓથી થયેલો ખૂણો પાયા ઉપરના માંહેના બે ખૂણાના સર્વાળાનો અર્ધ થશે.

(૨) એક ત્રિકોણના પાયાના ખૂણા દુભાગનારી લીટીઓ વચ્ચેનો ખૂણો શિરોબિંદુના ખૂણામાં પાયાના ખૂણાઓના અર્ધનો સર્વાળો ઉમેરિયે તેટલો થશે.

(૩) બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજૂઓ બીજાની બે બાજૂઓને અનુક્રમે સરખી છે અને સમાન્તર પણ છે, તો ત્રીજી બાજૂઓ પણ સરખી અને સમાન્તર થશે.

(૪) જો એક ચતુષ્કોણની સામસામેની બે બાજૂઓ સમાન્તર હોય, અને બીજી બે ફકત સરખી હોય તો સામસામેના ખૂણા ન્યૂનતાપૂરક થશે, અને કર્ણો સરખી થશે.

(૫) ચોરસ, કાટખૂણચતુષ્કોણ, અને સમબાજૂ ચતુષ્કોણ એ સર્વ સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણો થવા જોઈએ.

(૬) જો એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની એક કર્ણ તેની એક બાજૂની બરોબર હોય તો તે ચતુષ્કોણના દરેક ખૂણાનું મહત્વ કહાડો.

(૭) બે સરખી અને સમાન્તર લીટીઓના સામસામેના (વ્યુત્ક્રમ) છેડાઓ સાંધ્યા, તો સાંધનારી લીટીઓ સમાન કયારે થશે, અને અસમાન કયારે ?

(૮) એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓમાંથી સામી બાજૂઓ સુધી કોઈ પણ લીટીઓ એવી દોરી ન શકાય કે તે અરસ્પરસ એકએકને દુભાગે.

(૯) કોઇ અન્તવાન સીધી લીટીના ગમે તેટલા સરખા ભાગ કરો.

(૧૦) એક કાટખૂણ ત્રિકોણનો એક સાંકડો ખૂણો બીજા કરતાં ત્રણ ગણો છે, તો ન્હાના ખૂણાને ત્રિભાગો.

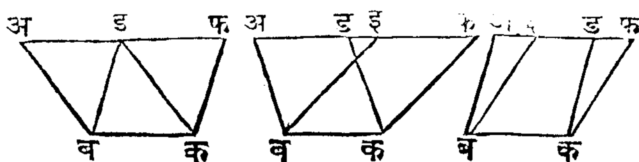
(૧૧) એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણના પાયાના એક છેડામાંથી એક લીટી સામી બાજૂ સૂધી, તથા બીજી બે લીટી પાયાના કોઈપણ બિંદુમાંથી સામી બાજૂઓ સૂધી, એવી દોરી છે કે તેઓ પાયા સાથે સરખા ખૂણા કરે, તો પાછલી બે લીટી મળીને પહેલીની બરોબર થશે.

(૧૨) બે આપેલી લીટીઓની વચ્ચે એક એવી લીટી દોરો કે તે એક આપેલી લીટીની બરોબર હોય અને બીજી બે આપેલી લીટીને સમાન્તર હોય.

(૧૩) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની એક બાજૂમાં આપેલા બિંદુમાંથી એક એવી લીટી દોરો કે તે તે સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણને દુભાગે.

સિદ્ધાંત ૩૫. પ્રમેય

પ્રતિજ્ઞાઃ—એકજ પાયા ઉપરના તથા એકજ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચેના સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણો બરાબર છે.



ધારોકે अबकड અને इबकफ સમાન્તરબાજૂચતુષ્કોણો એકજ પાયા बक ઉપર અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ बक, अफ ની વચ્ચે છે;

તો એક સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ બીજાના ક્ષેત્રફળની બરોબર છે.

સિદ્ધતા.

(૧) જો આપેલા સ૦બા૦ ચતુષ્કોણોની પાયાની સામેની બે બાજૂઓ એકજબિંદુડમાં આવી મળતી હોય,

તો દરેક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ, बडक ત્રિકોણનો બમણો છે;　　(૧. ૩૪)

માટે તેઓ એકેકની બરોબર છે,　　(પ્ર. પ્ર. ૬)

(૨) પણ જો बक પાયાની સામેની अड અને इफ બાજૂઓ એકજ બિંદુમાં મળી જતી ન હોય,

તો अबकड સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ છે,

માટે अड બાજૂ बकની બરોબર છે;　(૧. ૩૪)

અને તેજ કારણથી इफ લીટી बकની બરોબર છે;

માટે अड લીટી इफ ની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧)

માટે બીજી આકૃતિ પ્રમાણે) આખી લીટી इअ,

અથવા (ત્રીજી આકૃતિ પ્રમાણે) બાકી રહેલી इअ

આખી અથવા બાકી રહેલી फडની બરોબર છે,

માટે फडक, इअब ત્રિકોણોમાં,

फड લીટી इअ ની બરોબર છે,　(સિદ્ધ કીધું)

અને डक બાજૂ સામેની બાજૂ अबની બરોબર છે;　(૧. ૩૪)

અને બહારનો ખૂણો फडक માંહેના ખૂણા इअबની બરોબર છે;　(૧. ૨૯)

માટે फडकત્રિકોણइअबત્રિકોણનીબરોબર છે.(૧.૪)

હવે આખીઆકૃતિ अबकफ માંથી फडफ ત્રિકોણ બાદ કરીશું તો બાકી જે ભાગ રહેશે તે તેજ આકૃતિમાંથી इअब ત્રિકોણ બાદ કરતાં જે ભાગ રહેશે તેની બરોબર થવો જોઇએ.　(પ્ર. પ્ર. ૩)

પણ એક ત્રિકોણ બાદ કરતાં તો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ अवकड બાકી રહેશે, અને બીજો ત્રિકોણ બાદ કરતાં સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ इवकफ રહેશે;

માટે સ૦બા૦ ચતુષ્કોણ अवकड સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ इवकफ ની બરોબર છે.

માટે એકજ પાયા ઉપર ઇ૦ प्र. सि.

ટીપઃ—આ સિદ્ધાંતની પહેલાં જ્યાં જ્યાં બે આકૃતિ એકેકની બરોબર બતાવવામાં આવી છે, ત્યાં ત્યાં "બરાબર" શબ્દનો અર્થ સર્વ પ્રકારે બરોબર એવો કીધો છે; જેમ કે ૪ થા વગેરે સિદ્ધાંતોમાં બે ત્રિકોણો બરોબર કીધા છે, એટલે એવી રીતે કે દરેકની એકેક બાજૂ તથા એકેક ખૂણો અનુક્રમે બીજાની એકેક બાજૂ તથા એકેક ખૂણાની બરોબર; અને વળી તે આકૃતિઓ સ્થાનોપરી પણ થઇ શકે. પણ આ અને હવે પછીના કેટલાક સિદ્ધાંતોમાં આકૃતિ બરોબર કીધી છે ત્યાં "બરોબર" શબ્દનો અર્થ ફક્ત "ક્ષેત્રફળમાં બરોબર" એમ સમજવો. એક આકૃતિ બીજીના ઉપર સ્થાનોપરી થઈ શકે અથવા ન થાય તોપણ તેમનું ક્ષેત્રફળ એ સિદ્ધાંતોમાં સરખું બતાવ્યું છે. જેમકે, બે કાગળ અથવા લાકડાના ત્રિકોણાકાર અથવા ચતુષ્કોણ કકડા એવા થઇ શકે કે સ્થાનોપરી ન થાય, તે છતાં તેઓનું ક્ષેત્રફળ (તેમની સપાટીમાં આવેલી જગ્યા) સરખું હોય.

ટીપઃ—ઉપલી સિદ્ધતાના છેલા ભાગમાં જરા ગુંચવણ જેવું છે. બીજી રીત એ ભાગ સિદ્ધ કરવાની એમ છે;–(આકૃતિ ૨.)

ધારો કે **वइ** અને **कड** લીટીઓ **ग** બિંદુમાં છેદેછે, તો **अवइ** અને **डकफ** ત્રિકોણો સરખા છે, તેમાંથી **डगइ** ત્રિકોણ બાદ કરો, અને **वगक** ઉમેરો; તો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણો સરખા થશે.

આકૃતિ ૩ માં સરખા ત્રિકોણોમાં **इबकड** આકૃતિ ઉમેરો, તો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણો સરખા થયા.

પ્રશ્ન.

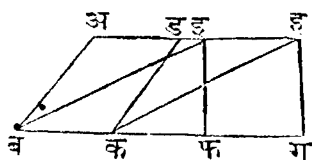
(૧) ઉપલો સિદ્ધાંત સાધારણ પાયા ઉપર લઈને સિદ્ધ કરો.

(૨) એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજૂએ બે સરખા સમાન્તર બાજૂ ચતુષ્કોણો હોય તો તેઓ એકજ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે થશે.

સિદ્ધાંત ૩૬. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—બરોબર પાયા ઉપરના અને એકજ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચેના સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણો બરોબર છે.

સાધન.



ધારો કે अबकड અને इफगह સમાન્તર બાજૂ ચતુષ્કોણો બરોબર પાયા बक અને फग ઉપર છે, અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ अह बग વચ્ચે છે.

તો સ૦ બા૦ अबकड સ૦ બા૦ इफगहની બરોબર થશે.

રચના.

बह, कह સાંધો.

સિદ્ધતા.

बक લીટી फगની બરોબર છે, (પ્રતિ.)

અને फग લીટી સામેની બાજૂ इहની બરોબર છે. (૧. ૩૪.)

માટે, बक લીટી इहની બરોબર છે, (પ્ર. પ્ર. ૧)

અને તેઓ સમાન્તર પણ છે; (પ્રતિ.)

માટે बइ अनेकह જે તેઓના એકજ તરફના છેડાઓ સાંધે છે તે લીટીઓ પણ સરખી અને સમાન્તર છે. (૧. ૩૩)

માટે इबकह સમાન્તર બાજૂ ચતુષ્કોણ થયો.

હવે अबकड સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ इबकहની બરોબરછે; કારણકે એ બે એકજ પાયા बक અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ बक, अहની વચ્ચે છે. (૧. ૩૫.)

વળી, इफगह સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ इबकहની બરોબર છે; કારણ કે તેઓ એકજ પાયા इह અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ इह, बगની વચ્ચે છે. (૧. ૩૫)

માટે, સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ अबकड સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ इफगह ની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧)

માટે બરોબર પાયા ઉપર ઈ૦ प्र. सि.

ટીપઃ—એવું ધારેલું છે કે બરોબર પાયાઓને એકજ સીધી લીટીમાં મૂકેલા છે.

ઉપસિદ્ધાંતોઃ—

(૧) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ તેના પાયાના સરખાજ પાયા ઉપર તેટલીજ ઊંચાઈના કાટખૂણુ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળની બરોબર છે.

(૨) બરોબર પાયા ઉપરના અને બરોબર ઊંચાઈના સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણો ક્ષેત્રફળમાં બરોબર છે.

(૩) સરખી ઊંચાઈના સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણોમાં જેનો પાયો મ્હોટો તેનું ક્ષેત્રફળ પણ મ્હોટું; અને પાયા સરખા હોય તો જેની ઊંચાઈ વધારે તેનું ક્ષેત્રફળ પણ વધારે.

પ્રશ્ન.

(૧) ૩૫ અને ૩૬ મા સિદ્ધાંતોમાં શો ફેર છે?

(૨) ઉપલો સિદ્ધાંત अफ ને डग લીટીઓ સાંધીને સિદ્ધ કરો.

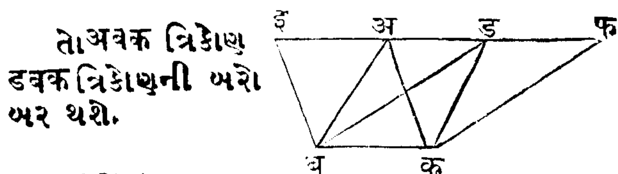
સિદ્ધાંત ૩૭. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:-એકજ પાયા ઉપર અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ વચ્ચેના ત્રિકોણો બરોબર છે.

સાધન.

એકજ પાયા वक ઉપર અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ वक અને अड વચ્ચે બે ત્રિકોણો अवक, डवक છે

તો अवक ત્રિકોણ डवक ત્રિકોણની બરોબર થશે.



રચના.

व બિંદુમાંથી वइ લીટી कअ ને સમાન્તર દોરો;(૧.૩૧)
ધારોકે તે डअ ને લંબાવતાં इ બિંદુમાં છેદે છે;
તેમજ क બિંદુમાંથી वड ને એક સમાન્તર લીટી कफ દોરો જે अड ને લંબાવતાં फ બિંદુમાં છેદે છે.

સિદ્ધતા.

રચના પ્રમાણે इवकअ અને डवकफ દરેક આકૃતિ એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ છે.

અને વળી તેઓ એકજ પાયા वक ઉપર અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ वक, इफ ની વચ્ચે છે,

માટે, इवकअ સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ डवकफ ની બરોબર છે. (૧. ૩૫)

અને अवक ત્રિકોણ इवकअ સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણનો અર્ધ છે.

કારણ કે अव કર્ણ તેને દુભાગે છે; (૧. ૩૪)

વળી डबक ત્રિકોણ डबकफ સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણનો અર્ધ છે,

કારણ કે डक તેને દુભાગે છે. (૧. ૩૪)

પણ સરખી ચીજોના અર્ધ સરખાજ છે (પ્ર. પ્ર.૭)

માટે अबक ત્રિકોણ डबक ત્રિકોણની બરોબર છે;

માટે એકજ પાયા ઉપર ૬૦ प्र॰ सि॰

પ્રશ્ન.

(૧) ઉપલી આકૃતિમાં બીજા કયા ત્રિકોણો બરોબર છે ?

(૨) જો अक, बड લીટીઓ न બિંદુમાં છેદે તો બતાવો કે अनब, અને कनड ત્રિકોણો સરખા છે.

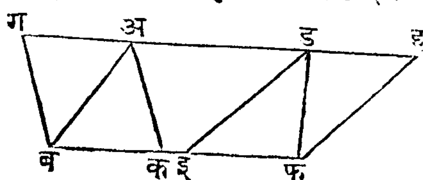
(૩) જો એક સમબાજૂ ચતુષ્કોણ अबकडની अब બાજૂમાં એક બિંદુ प લઇને पक,पड દોરી હોય તો, पअड, पबक ત્રિકોણ મળીને पडक ત્રિકોણની બરોબર થશે.

સિદ્ધાંત ૩૮. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ-બરોબર પાયાઓ ઉપર અને એકજ સમા-ન્તર લીટીઓની વચ્ચેના ત્રિકોણો બરોબર છે

સાધન.

ધારો કે अबक, डइफ ત્રિકોણો बक અને इफ બે બરો-



બર પાયાઓ ઉપર, અને बफ, अड સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે છે.

તો अबक ત્રિકોણ डइफ ત્રિકોણની બરોબર થશે.

રચના.

ब બિંદુમાંથી बग લીટી कअ ને સમાન્તર દોરો; ધારો કે તે डअ લીટીને લંબાવતાં ग બિંદુમાં છેદે છે; (૧. ૩૧)

फ બિંદુમાંથી फह લીટી इड ને સમાન્તર દોરો; અને ધારો કે તે अड ને લંબાવતાં ह બિંદુમાં છેદે છે.

સિદ્ધતા.

રચના પ્રમાણે गबकअ અને डइफह દરેક સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ છે,

અને તેઓ બરોબર પાયા बक, इफ ઉપર છે, અને એકજ સીધી લીટીઓ बफ, गह વચ્ચે છે,

માટે गबकह, સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ डइफहની બરોબર છે; (૧. ૩૬)

અને अबक ત્રિકોણ गबकअ સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણનો અર્ધ છે,

કારણ કે अब કર્ણલીટી તેને દુભાગે છે; (૧. ૩૪)

અને डइफ ત્રિકોણ डइफह સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણનો અર્ધ છે,

કારણ કે डफ તેને દુભાગે છે;

પણ સરખી ચીજોના અર્ધ સરખા છે; (પ્ર. પ્ર. ૭)

માટે, अबक ત્રિકોણ डइफ ત્રિકોણની બરોબર છે.

માટે, બરોબર પાયાઓ ઉપર ઇ૦ प्र. सि.

ટીપઃ—આ સિદ્ધાંત ઉપરથી એવાં અનુમાન થઇ શકે છે કેઃ—

(૧) બરોબર પાયાઓ ઉપરના અને બરોબર ઊંચાઇના ત્રિકોણો ક્ષેત્રફળમાં બરોબર છે.

(૨) બે ત્રિકોણો સરખી ઊંચાઇના હોય, તો જેનો પાયો વધારે

તેનું ક્ષેત્રફળ પણ વધારે; અને બે સરખા પાયા ઉપરના ત્રિકોણોમાં જેની ઊંચાઇ વધારે તેનું ક્ષેત્રફળ વધારે.

પ્રશ્ન.

(૧) ઉપલા બે સિદ્ધાંતોમાં ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા છે કે કેમ !

(૨) બન્ને પાયાઓ એકજ લીટીમાં છે તેમ ન લેતાં એક પાયો એકમાં અને બીજો બીજી સમાન્તર લીટીમાં લઇને સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૩) એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજૂએ બે ન્હાના મોટા ત્રિકોણો હોય તો તેઓ એકજ સમાન્તરલીટીઓ વચ્ચે નથી.

(૪) એક ત્રિકોણના પાયાનું મધ્યબિંદુ શિરોબિંદુ સાથે જોડ્યું હોય, તો જે બે ત્રિકોણો થાય તે બરોબર.

(૫) જો એક ત્રિકોણની બે બાજૂઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજૂઓની બરોબર હોય, અને માંહેલા ખૂણા ન્યૂનતાપૂરક હોય તો તે ત્રિકોણો બરોબર થશે.

(૬) પ્રશ્ન ૪ અને ૫ નો અર્થ એકજ છે તે બતાવો.

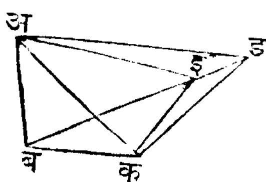
સિદ્ધાંત ૩૯. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજૂએ બે બરોબર ત્રિકોણો હોય, તો તેઓ એકજ સમાન્તર લીટીઓ વચ્ચે હોવા જોઇએ.

સાધન.

ધારો કે અબક, ડબક ત્રિકોણો એકજ પાયા બક ઉપર અને તેની એકજ (ઉપરની) બાજૂએ છે; અને તેઓનું ક્ષેત્રફળ બરોબર છે;

તો તેઓ એકજ સમાન્તર લીટીઓ વચ્ચે થશે; એટલે, अड સાંધિયે, તો अड લીટી बक ને સમાન્તર થશે.



રચના.

જો अड લીટી बक ને સમાન્તર ન હોય, તો अ બિંદુમાંથી જો બની શકે તો બીજી લીટી अइ बक ને સમાન્તર દોરો.

ધારો કે તે લીટી बड ને અથવા તેને લંબાવતાં इ બિંદુમાં મળે છે. इक સાંધો.

સિદ્ધાંતો.

એકજ પાયા बक ઉપર, અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ बक, अइ ની વચ્ચેના ત્રિકોણો अबक, इबक બરોબર છે; (૧. ૩૭)

પણ अबक ત્રિકોણ डबक ની બરોબર છે; (પ્રતિ.)

માટે डबक ત્રિકોણ इबक ત્રિકોણની પણ બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧)

આખો ત્રિકોણ તેના ભાગની બરોબર; એ અશકયછે (પ્ર. પ્ર. ૯)

માટે अइ લીટી बक લીટીને સમાન્તર નથી.

એજ પ્રમાણે, એવું સિદ્ધ થઇ શકે કે अ બિંદુમાંથી अड શિવાય કોઇ પણ લીટી बक ને સમાન્તર નથી.

માટે अड લીટી बक ને સમાન્તર છે.

માટે એકજ પાયા ઉપર ઇ૦ प्र. सि.

ટીપઃ—આ સિદ્ધાંત ઉપરથી અનુમાન થાય છે કે એકજ પાયા ઉપર બરોબર ત્રિકોણો હોય તો તેમની ઊંચાઇ બરોબર છે.

પ્રશ્ન.

(૧) આકૃતિમાં **અડ** લીટીની નીચે **અઇ** પડેછે; પણ **અઇ** બહાર પડે તો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

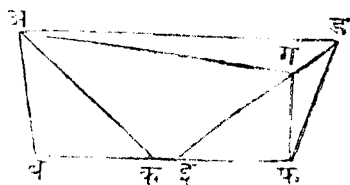
(૨) એક ત્રિકોણની બે બાજૂઓના મધ્યબિંદુને સાંધનારી લીટી પાયાને સમાન્તર છે.

(૩) એજ લીટી પાયાની અર્ધ છે.

સિદ્ધાંત ૪૦. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એકજ સીધી લીટીમાં આવેલા બરોબર પાયાઓ ઉપર તેની એકજ બાજૂએ આવેલા બરોબર ત્રિકોણો એકજ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે છે.

સાધન.



એકજ સીધી લીટી બફમાં આવેલા સરખા પાયા બક અને ડફ ઉપર અને તેઓની એકજ (ઉપલી) બાજૂએ બે ત્રિકોણો અબક, ડઇફ છે; તો તે ત્રિકોણો એકજ સમાન્તર લીટીઓ વચ્ચે થશે.

એટલે અઇ બિંદુઓ સાંધિયે તો અઇ લીટી બફ ને સમાન્તર થશે.

રચના.

જો અઇ લીટી બફ ને સમાન્તર ન હોય તો અ બિંદુ માંથી બની શકે તો, અગ લીટી બફને સમાન્તર દોરો.

ધારો કે તે ઇડ ને (અથવા તેને લંબાવતાં) ગ બિંદુમાં મળે છે,

ગ ફ બિંદુઓ સાંધો.

સિદ્ધતા.

હવે अबक ત્રિકોણ गइफ ત્રિકોણની બરોબર છે; કારણ કે તેઓ બરોબર પાયા बक, इफ ઉપર, અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ वफ,अगनी વચ્ચે છે. (૧.૩૮)

પણ अबक ત્રિકોણ તો डइफ ત્રિકોણની બરોબર છે; (પ્રતિ.)

માટે डइफત્રિકોણ પણ गइफ ત્રિકોણની બરોબર છે. આખો પોતાના ભાગની બરોબર; એ અશક્ય છે. (પ્ર. પ્ર. ૯)

માટે अग લીટી वफ ને સમાન્તર નથી.

એજ પ્રમાણે, આપણે બતાવીશું કે अड શિવાય કોઈ પણ લીટી अ બિંદુમાંથી वफ ને સમાન્તર દોરાય નહિ.

માટે अड લીટી वफ ને સમાન્તર છે.

માટે એકજ સીધી લીટીમાં ઇ૦ प.सि.

ટીપઃ—આ સિદ્ધાંત ઉપરથી અનુમાન થાય છે કેઃ—

(૧) સરખા પાયા ઉપર સરખા ત્રિકોણો હોય તો તેમની ઉંચાઈ પણ બરોબર છે.

(૨) સરખા ત્રિકોણો બરોબર ઉંચાઈનાં હોય તો તેમના પાયા બરોબર છે.

પ્રશ્ન.

(૧)આકૃતિમાં દોરેલી अग લીટી अड ની નીચે પડે છે,તે ઉપરથી જાય તો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૨) ड બિંદુમાંથી સમાન્તર લીટી દોરીને સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

—o—

પહેલા ૪૦ સિદ્ધાંતો ઉપર પ્રશ્નો.

(૧) "કોઇએ ત્રિકોણો અથવા સમાન્તર બાજૂ ચતુષ્કોણોમાં (૧) પાયાની સમાનતા (૨) ઊંચાઇની સમાનતા (૩) ક્ષેત્રફળની સમાનતા, એ ત્રણમાંથી બે આપી હોય તો ત્રીજી નિકળશે." આ વાક્યમાંથી ૭ સિદ્ધાંતો ઉપજી શકે છે, તેઓની પ્રતિજ્ઞા લખો અને સિદ્ધ કરો.

(૨) જે ચતુષ્કોણના બન્ને કર્ણો તેને દુભાગે છે તે ચતુષ્કોણ સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ છે.

(૩) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણના બે કર્ણોથી ચાર ત્રિકોણો થાય છે તે બરોબર છે.

(૪) કોઈપણ ચતુષ્કોણના બે કર્ણોથી થયલા બે સામ-સામેના ત્રિકોણો બરોબર હોય તો બાકી રહેલી બે બાજૂઓ સમાન્તર થશે.

(૫) એક ત્રિકોણની બધી બાજૂઓનાં મધ્યબિંદુ સાંધ-વાથી જે ચાર ત્રિકોણો થાય તે બરોબર છે.

(૬) એક કાટખૂણ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાજૂનાં મધ્ય-બિંદુઓ સાંધતાં એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ થશે.

(૭) એક ચોરસની પાસપાસેની બાજૂનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધતાં એક ચોરસ થશે.

(૮) એક ત્રિકોણની એક બાજૂનાં કોઇપણ બિંદુમાંથી બીજી બે બાજૂઓનાં મધ્યબિંદુ સુધી લીટીઓ દોરતાં જે ચતુષ્કોણ થશે તે ત્રિકોણનો અર્ધ થશે.

(૯) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની એક બાજૂના બન્ને છેડામાંથી સામેની બાજૂનાં કોઇપણ બિંદુસુધી લીટીઓ દોરી તો જે ત્રણ ત્રિકોણો થશે તેમાં એક બીજા બેના સરવાળા બરોબર થશે.

(૧૦) એક ત્રિકોણની બે બાજૂઓનાં મધ્યબિંદુ સામેના ખૂણા સાથે સાંધવાથી જે ત્રણ ત્રિકોણ અને એક ચતુષ્કોણ થશે, તેમાં સામસામેના ત્રિકોણો બરોબર થશે, અને બાકી રહેલા ત્રિકોણ ચતુષ્કોણની બરોબર થશે.

(૧૧) સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની એક બાજૂના મધ્યબિંદુમાંથી સામેની બાજૂના એક છેડા સુધી લીટી દોરવાથી જે ત્રિકોણ થશે તે સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણોનો એક ચતુર્થાંશ થશે.

(૧૨) ૧. ૧૬ની આકૃતિમાં **अबक, फबक** ત્રિકોણો ક્ષેત્રફળમાં બરોબર છે.

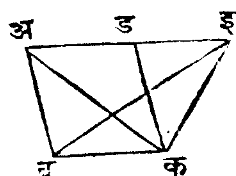
(૧૩) એક એવી લીટી દોરો કે તેમાંનું કોઈ પણ બિંદુ એક આપેલા ત્રિકોણના પાયાના બે છેડા સાથે સાંધિયે તો જે નવા ત્રિકોણો થાય તે આપેલા ત્રિકોણની બરોબર થાય.

(૧૪) એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણ એવો દોરો કે એક આપેલા ત્રિકોણની બરોબર હોય અને તેજ પાયા ઉપર હોય.

(૧૫) કોઇ પણ સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ, તેની બરોબર પાયા તથા ઉંચાઇના એક કાટખૂણ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળની બરોબર છે; અને એક એવાજ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ એ ક્ષેત્રફળના અર્ધની બરોબર છે.

સિદ્ધાંત ૪૧. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ અને એક ત્રિકોણ એકજ પાયા ઉપર અને એકજ સમાન્તર બાજૂઓની વચ્ચે હોય, તો સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ ત્રિકોણનો બમણો થશે.



સાધન.

ધારો કે अबकड સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ તથા इबक ત્રિકોણ એકજ बक પાયા ઉપર અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ बक, अइની વચ્ચેછે.

તો अबकड સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ इबक ત્રિકો-ણનો બમણો થશે.

રચના:—अक સાંધો.

સિદ્ધતા.

अबक ત્રિકોણ इबक ત્રિકોણની બરોબર છે.

કારણ કે તેઓ એકજ बक પાયા ઉપર, અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ बक, अइ ની વચ્ચે છે, (૧. ૩૭)

પણ अबकड સ૦બા૦ ચતુષ્કોણ अबक ત્રિકોણનો બમણો છે,

કારણ કે अक કર્ણ તેને દુભાગે છે. (૧. ૩૪)

માટે, अबकड સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ इबक ત્રિકો-ણનો પણ બમણો છે.

માટે, એક સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ ઇ૦ प्र. सि.

ટીપ:—આ સિદ્ધાંત બીજી રીતે આ પ્રમાણે લખાય:—

જો એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ તથા ત્રિકોણના પાયા તથા ઉંચાઇ બરોબર હોય, તો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ ત્રિકોણનો બમ-ણો થશે.

તેમજ:—જો એક સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ તથા ત્રિકોણની ઉં-ચાઇ બરોબર હોય, અને ત્રિકોણનો પાયો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણના પાયાના બમણો હોય તો તે ચતુષ્કોણ તથા ત્રિકોણ બરોબર થશે.

પ્રશ્ન.

(૧) એક સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ અને એક ત્રિકોણ બરોબર પાયા ઉપર અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ વચ્ચે હોય, તો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ ત્રિકોણના બમણા બરાબર થશે.

(૨) એક કાટખૂણ સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણ એવો બનાવો કે તે એક આપેલા ચોરસની બરોબર હોય.

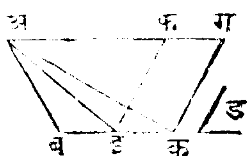
(૩) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની બહાર એક બિંદુ લઈને તેને બે સામસામેની બાજૂના છેડાઓ સાથે સાંધિયે તો જે બે ત્રિકોણો થશે તેના ક્ષેત્રફળની બાદબાકી આપેલા ચતુષ્કોણની અર્ધ થશે.

સિદ્ધાંત ૪૨. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક એવો સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ કરો કે તે એક આપેલા ત્રિકોણની બરોબર થાય, અને તેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણાની બરોબર થાય.

સાધન.

ધારો કે अबक આપેલો ત્રિકોણ છે,



અને ड આપેલો ખૂણો છે,

તો એક સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ अबक ત્રિકોણની બરોબર, અને તેનો એક ખૂણો ड ખૂણાની બરોબર હોય, એવો કરવો છે.

રચના.

बक લીટીને इ બિંદુમાં દુભાગો; (૧. ૧૦) અને अइ સાંધો;

कइ લીટીમાં इ બિંદુ આગળ कइफ ખૂણો ड બરોબર કરો; (૧. ૨૩)

અને अ બિંદુમાંથી अफग લીટી इक ને સમાન્તર દોરો. (૧. ૩૧)

અને क બિંદુમાંથી कग લીટી इफ ને સમાન્તર દોરો.

ત્યારે फइकग માગેલો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ થશે.

સિદ્ધતા.

अबइ અને अइक ત્રિકોણો બરોબર છે.

કારણ કે તેઓ બરોબર પાયા वइ, इक ઉપર છે, અને એકજ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે છે. (૧. ૩૮)

માટે अवक ત્રિકોણ अइक નો બમણો છે;

પણ फइकग સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ अइक ત્રિકોણનો બમણો છે.

કારણ કે તેઓ એકજ પાયા इक અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ इक, अग ની વચ્ચે છે, (૧. ૪૧)

માટે फइकग સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ अवक ત્રિકોણની બરોબર થયો.

અને વળી તેનો એક ખૂણો कइफ આપેલા ड ખૂણાની બરોબર છે.

માટે એક એવો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ કીધો ઇ૦ क्र. कृ.

પ્રશ્ન.

(૧) આ સિદ્ધાંત **अब** લીટીના અર્ધ ઉપર સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ કહાડી બતાવો.

(૨) **ड** ખૂણાની બરોબરનો ખૂણો **क** અથવા **ब** આગળ બનાવીને માગ્યા પ્રમાણેનો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ કરો.

(૩) આપેલો ખૂણો પહોળો ખૂણો લઇને કૃત્ય કરો.

(૪) એક આપેલા ત્રિકોણ બરોબર એક ચોરસ બનાવો.

(૫) એક સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ એવો બનાવો કે એક આપેલા ચોરસની બરોબર થાય અને તેજ પાયા ઉપર હોય અને તેનો એક ખૂણો એક કાટખૂણાનો અર્ધ હોય.

(૬) એક ત્રિકોણ એવો બનાવો કે જે એક આપેલા સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની બરોબર થાય અને જેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણાની બરોબર થાય.

(૭) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ એવો બનાવો કે તે એક

આપેલા ત્રિકોણની બરોબર હોય, અને તેની બાજૂઓનો સર્વાળો ત્રિકોણની બાજૂઓના સર્વાળાની બરોબર હોય.

(૮) એક કાટખૂણ ચતુષ્કોણની બરોબર ક્ષેત્રફળનો એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણ બનાવ્યો હોય તો ત્રિકોણની પરિમિતિ (બાજૂઓનો સર્વાળો) ચોખૂણની પરિમિતિ કરતાં વધારે થશે.

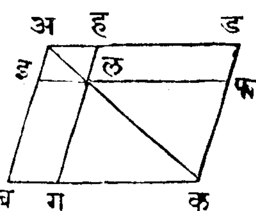
વ્યાખ્યા:–એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણના કર્ણમાં એક બિંદુ લઇએ અને તેમાંથી સમબાજૂ ચતુષ્કોણની બાજૂઓને સમાન્તરલીટીઓ દોરીએ તો તે આખી આકૃતિના જે ચાર ભાગ થશે, તેમાંથી જે બેમાંથી કર્ણ પાર જાય છે, તેને **"કર્ણની આસપાસના સમાન્તર બાજૂ ચતુષ્કોણો"** કહેવા; અને જે બીજા બે તે આકૃતિ પૂરી કરવાને બાકી રહ્યા તેને તે **"સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની પૂરવણીઓ"** અથવા **"પૂરકસમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણો"** કહેવા.

જેમકે નીચેના સિદ્ધાંતની આકૃતિમાં **अइलह** અને **लगकफ** એ કર્ણની આસપાસના તથા **हलफड** અને **इबगल** એ પૂરકસમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણો થયા.

સિદ્ધાંત ૪૩. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:–કોઇ પણ સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણમાં કર્ણની આસપાસના સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની પૂરવણીઓ બરોબર છે.

સાધન



ધારો કે अबकड એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ છે;

અને लड, लब તેના પૂરકસમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણો છે;

એટલે તેના કર્ણ अक ની આસપાસના સ૦બા૦ચતુષ્કોણો इह, गफ ની પૂરવણીઓ છે.

ત્યારે પૂરક સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ વલ પૂરક સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ લેડ ની બરોબર થશે.

સિદ્ધતા.

ઇદ સમબાજૂ ચતુષ્કોણ છે, અને અલ તેનેા કર્ણ છે; માટે અઇલ ત્રિકેાણ અહલ ત્રિકેાણની બરેાબર છે. (૧.૩૪)

એજ પ્રમાણે, લગક ત્રિકેાણ લફક ત્રિકેાણની બરેાબર છે.

પણ આખેા અવક ત્રિકેાણ આખા અડક ત્રિકેાણની બરેાબર છે.

કારણ કે અક કર્ણ તેને દુભાગે છે; (૧. ૩૪)

માટે બાકી રહેલેા પૂરક સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ વલ બાકી રહેલા પૂરક સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ લડની બરેાબર છે.

માટે કોઈપણ સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણના ઈ૦ પ્ર. સિ.

પ્રશ્ન.

(૧) જે ચાર માંહેલા ચતુષ્કોણેા છે તે સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ છે એવું બતાવેા; અને તેઓ આપેલા સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણને સમકેાણ છે એવું બતાવેા.

(૨) બીજેા કર્ણ દેારીને તેમાં બિંદુ લઇને સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરેા.

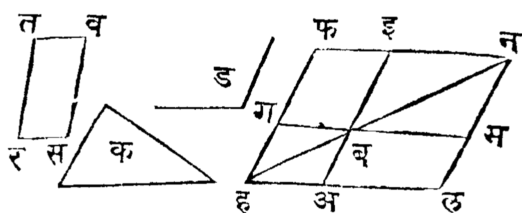
(૩) જેા કર્ણમાં બે બિંદુઓ લઇને તે બંનેમાંથી સમાન્તર લીટીઓ દેારી તેા જૂદી જૂદી કેટલી આકૃતિઓ થશે?

તે બધા સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ છે એવું બતાવેા, અને તેમાંના કયા કયા બરેાબર છે તે બતાવેા.

સિદ્ધાંત ૪૪. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:-એક આપેલી સીધી લીટીને એક એવેા

સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ લગાડવો કે તે એક આપેલા ત્રિકોણની બરોબર થાય, અને તેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણાની બરોબર હોય.



(એક સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ એક લીટીને લગાડવો, એટલે એક એવો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ કહાડવો કે તે લીટી તેની એક બાજૂ થાય.)

સાધન.

ધારો કે अब આપેલી લીટી છે, क આપેલો ત્રિકોણ છે; અને ड આપેલો ખૂણો છે.

તો अब સીધી લીટીને એક એવો સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ લગાડવો છે કે તે क ત્રિકોણની બરોબર હોય અને તેનો એક ખૂણો ड ખૂણા બરોબર હોય.

રચના.

એક સમબાજૂ ચતુષ્કોણ रसवत એવો બનાવો કે તે क ત્રિકોણની બરોબર હોય, અને તેનો स ખૂણો ड ખૂણા બરોબર હોય. (૧. ૪૨)

अब લીટી વધારીને वइ લીટી सव બરોબર કાપો;

ब બિંદુ આગળ इव લીટીમાં इवग ખૂણો स ખૂણા બરોબર કરો; (૧. ૨૩)

वग લીટી रस બરોબર કાપો;

इ. અને ग બિંદુઓમાંથી इफ, गफ : લીટીઓ वग, वइ ને અરસ્પરસ સમાન્તર દોરો, (૧. ૩૧)

હવે वफ એક સમાન્તર બાજૂ ચતુષ્કોણ થયો, જે રચના પ્રમાણે सत ની એટલે क ત્રિકોણની બરોબર છે, અને તેનો व ખૂણો ड ખૂણા બરોબર છે.

अ બિંદુમાંથી अह લીટી वग અથવા इफ સમાન્તર દોરો. (૧. ૩૧)

અને फग ને લંબાવતાં ધારો કે તે ह બિંદુમાં મળે છે.

हव સાંધો.

હવે, अह અને इफ સમાન્તર છે, અને हफ લીટી તેઓને મળે છે,

માટે अहफ અને हफइ ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે, (૧. ૨૯)

માટે, वहफ અને हफइ મળીને બે કાટખૂણા કરતાં ઓછા છે,

માટે, हव અને फइ લીટીઓને व અને इ તરફ લંબાવતાં મળશે. (પ્ર. પ્ર. ૧૨)

ધારો કે તેઓ न બિંદુમાં મળે છે.

न બિંદુમાંથી नल લીટી इअ અથવા फह ને સમાન્તર દોરો. (૧. ૩૧)

અને ધારો કે अह, गव ને લંબાવતાં તેઓ नल ને ल અને म બિંદુઓમાં મળે છે.

ત્યારે वल માગેલો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ થશે.

સિદ્ધતા.

फहलन એક સમાન્તર બાજૂ ચતુષ્કોણ છે.

માટે, लव, वफ પૂરક સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણો થયા.

માટે, लव સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ वफ ની બરોબર છે;
(૧. ૪૩)

પણ क ત્રિકોણ वफ ની બરોબર છે; (રચ.)

માટે लव સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ પણ क ત્રિકોણની બરોબર છે.

વળી अवम ખૂણો સામેના ખૂણા गवइની બરોબર છે;
(૧. ૧૫)

પણ गवइ ખૂણો તો ड ખૂણા બરોબર છે, (રચ.)

માટે, अवम ખૂણો પણ ड ખૂણા બરોબર છે.

અને વળી वल સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણની अव એક બાજૂ છે;

માટે अव લીટીને એક એવો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ लव લગાડયો કે તે क ત્રિકોણની બરોબર છે,

અને તેનો એક ખૂણો अवम આપેલા ખૂણા ड ની બરોબર છે.

માટે, એક આપેલી સીધી લીટી ૯૦ क्र. क्र.

પ્રશ્ન.

(૧) ૪૨ અને ૪૪ સિદ્ધાંતો વચ્ચે શો ફેર છે?

(૨) अब લીટીને ब આગળથી નહિ, પણ अ આગળથી લંબાવીને કૃત્ય કરો.

(૩) बह લીટી ન સાંધતાં अग સાંધીને પછી સર્વ રચના ઉપર પ્રમાણેજ કીધી, તો જેવો જોઇએ છે તેવો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ થશે કે નહિ?

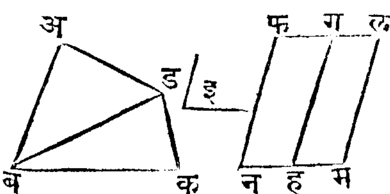
(૪) એક એવો કાટખૂણ ચતુષ્કોણ કહાડો કે તે એક આપેલા ત્રિકોણ બરોબર હોય અને તેની એક બાજૂ એક આપેલી લીટી બરોબર હોય.

સિદ્ધાંત ૪૫. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞાઃ–એક એવો સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ બનાવો કે તે એક આપેલી સીધી લીટી આકૃતિની બરાબર થાય, અને તેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણાની બરોબર થાય.

સાધન.

ધારો કે अवकड એક આપેલી સીધી લીટી આકૃતિ છે; અને इ આપેલો ખૂણો છે. તો એક સમાન્તર



બાજૂ ચતુષ્કોણ એવો બનાવવો છે કે જે अवकडની બરોબર થાય, અને જેનો એક ખૂણો इ ખૂણા બરોબર થાય.

રચના.

वड સાંધો.

अवड ત્રિકોણની બરોબર એક फह સમાન્તર બાજૂ ચતુષ્કોણ બનાવો, જેનો फनह ખૂણો इ ખૂણા બરોબર હોય. (૧. ૪૨)

અને गह લીટીને એક गम સ૰ બા૦ ચતુષ્કોણ લગાડો, જે डवक ત્રિકોણની બરોબર હોય, અને જેનો गहम ખૂણો इ ખૂણાની બરોબર હોય. (૧. ૪૪)

ત્યારે फनमल માગેલો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ થશે.

સિદ્ધતા.

गहम અને फनह દરેક इ ખૂણાની બરોબર છે.

માટે फनह ખૂણો गहम ની બરોબર છે.

એ દરેક સરખા ખૂણામાં गहन ખૂણો ઉમેરો;

તો फनह અને गहन ખૂણા गहम અને गहन ખૂણાની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૨)

પણ ફનહ, ગહન મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે;
(૧. ૨૯)

માટે ગહમ, ગહન ખૂણા પણ બે મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે.

માટે, નહ, હમ, એ બે લીટીઓ એકજ સીધી લીટીમાં છે,
(૧. ૧૪)

વળી, નમ અને ફગ સમાન્તર છે, અને તેઓને હગ મળે છે,

માટે મહગ, હગફ વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ બરોબર છે;
(૧. ૨૯)

એ બન્નેમાં હગલ ખૂણો ઉમેરો;

ત્યારે મહગ, હગલ ખૂણા મળીને હગફ, હગલ ખૂણાની બરોબર છે.

પણ હમ લીટી ગલને સમાન્તર છે, અને તેઓને હગ મળે છે,

માટે, મહગ, હગલ ખૂણા બે મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે. (૧. ૨૯)

માટે; હગફ, હગલ ખૂણા પણ બે મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે.

માટે, ફગ, ગલ લીટીઓ એકજ સીધી લીટીમાં છે.
(૧. ૧૪)

અને વળી નફ અને મલ દરેક હગને સમાન્તર છે. (રચ.)

માટે નફ લીટી મલને સમાન્તર છે. (૧. ૩૦)

અને નમ, ફલ સમાન્તર છે; (રચ.)

માટે, ફનમલ સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ થયો. (વ્યા. ૩૬)

અને ફહ સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ અબડ ત્રિકોણની બરોબર છે, (રચ.)

અને गम સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ डचक ત્રિકોણની બરોબર છે; (રચ.)

માટે આખો फनमल સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ अबकड આકૃતિની બરોબર છે;

અને તેનો फनम ખૂણો इ બરોબર છે.

એજ પ્રમાણે આપેલી આકૃતિ ચારથી વધારે બાજૂની હોય તેના બરોબર પણ સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ બનાવી શકાય.

માટે એક એવો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ ઇ૦ कृ कृ

ઉપસિદ્ધાંત:—એક આપેલી લીટી ઉપર એક એવો સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ લગાડવો કે જે એક આપેલી સીધી લીટી આકૃતિની બરોબર હોય, અને જેનો એક ખૂણો આપેલા ખૂણા બરોબર હોય.

ટીપ:—જો આપેલી આકૃતિ પાંચ બાજૂની હોય તો તેનું એક શિરોબિંદુ બીજાં બિંદુઓ સાથે સાંધતાં ત્રણ ત્રિકોણો થશે, તેમાં બે ત્રિકોણોની બરોબર તો ઉપર બતાવ્યા પ્રમાણે એક સ૦બા૦ચતુષ્કોણ બનાવી શકાશે; પછી लमલીટી ઉપર એક સ૦ બા૦ચતુષ્કોણ એવો લગાડો કે તે બાકી રહેલા ત્રિકોણનીબરોબર હોય; અને તેનો म આગળનો ખૂણો આપેલા ખૂણા બરોબર હોય;એટલે, આ નવી થયેલી આકૃતિ સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ સિદ્ધ થઈ શકશે, અને તે માગવા પ્રમાણેનો છે એતો સ્પષ્ટજ છે. એજ પ્રમાણે પાંચથી પણ વધારે બાજૂઓ આપેલી આકૃતિનું હોય તો કર્યા જવું.

પ્રશ્ન.

(૧) આપેલી આકૃતિ પાંચ બાજૂની હોય તો ઉપલું કૃત્ય કરી આપો.

(૨) એક આપેલી સીધીલીટીઆકૃતિ બરોબર એક કાટખૂણ ચતુષ્કોણ કહાડવો.

પહેલા ૪૫ સિદ્ધાંતો ઊપર પ્રશ્ન.

(૧) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણના ખુણા બિંદુઓમાંથી તેના કર્ણોને સમાન્તર લીટીઓ દોરી હોય તો એક નવા સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ પેહેલાનો બમણો થશે.

(૨) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણના એક કર્ણની આસપાસના સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણોના કર્ણની એક જોડ સમાન્તર છે.

(૩) એક આપેલા ત્રિકોણની બરોબર એક બીજો ત્રિકોણ કહાડવો, જેનો એક ખુણો એક આપેલા ખુણાની બરોબર હોય.

(૪) એક સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણની બરોબર એક બીજો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ કહાડવો જેનો એક ખુણો એક આપેલા ખુણા બરોબર હોય.

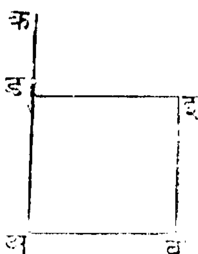
(૫) એક આપેલા સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ બરોબર એક સમબાજૂ ચતુષ્કોણ કહાડો.

(૬) એક એવો ત્રિકોણ બનાવો કે તે આપેલા ત્રિકોણ બરોબર હોય, અને તેનો એક ખુણો એક આપેલા ખુણા બરોબર હોય, અને તે ખુણાની જોડની એક બાજૂ એક આપેલી લીટી બરોબર હોય.

(૭) એક ત્રિકોણની એક બાજૂમાં આપેલા એક બિંદુમાંથી એવી લીટી દોરો કે તે તે ત્રિકોણના બે સરખા ભાગ કરે.

સિદ્ધાંત ૪૬. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞાઃ— એક આપેલી સીધી લીટી ઉપર એક ચોરસ કરવો.



સાધન.

अब આપેલી સીધી લીટી છે; તેના ઉપર એક ચોરસ કરવાનો છે.

રચના.

अ બિંદુમાંથી अक લીટી अब ને લંબ દોરો; (૧. ૧૧.)

अड લીટી अब જેટલા કરો; (૧. ૩)

ड બિંદુમાંથી डइ લીટી अब ને સમાન્તર દોરો; (૧.૩૧)

અને ब બિંદુમાંથી बइ લીટી अड ને સમાન્તર દોરો;

ધારો કે તે डइ લીટીને इ બિંદુમાં છેદે છે.

તો अडइब એક ચોરસ થશે.

સિદ્ધતા.

રચના પ્રમાણે अडइब એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ છે,

માટે, अब લીટી डइ ની બરોબર છે; અને अड, बइ બરોબર છે; (૧. ૩૪)

પણ अड લીટી अब બરોબર છે;

માટે, ચારે બાજૂઓ अब, अड, डइ इब એકેકને બરોબર છે;

એટલે, अडइब આકૃતિ સમબાજૂ છે.

વળી बअड ખૂણો કાટખૂણો છે, (રચ.)

અને, अड, बइ સમાન્તર લીટીઓ ઉપર अब પડે છે.

માટે बअड, अबइ મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે. (૧. ૨૯)

માટે अबइ ખૂણો પણ એક કાટખૂણા બરોબર હોવો જોઇએ.

અને તેઓની સામેના ખૂણા અનુક્રમે તેઓની બરો-
બર છે.

માટે, દરેક ખૂણો એક કાટખૂણા બરોબર છે.

એટલે, અबइई એક ચોરસ થયો;

અને તે अब લીટી ઉપર બનાવ્યો છે;

માટે એક આપેલી લીટી ઈ૦ कृ. कृ.

ઉપસિદ્ધાંત—(૧) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણનો એક ખૂણો કાટખૂણો હોય તો બધા ખૂણા કાટખૂણા થશે; એ વિષે ૩૪ મી વ્યાખ્યાની ટીપમાં કહ્યું છે.

(૨) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની બે પાસપાસેની બાજૂઓ બરોબર હોય; અને તેઓની વચ્ચેનો ખૂણો કાટ-ખૂણો હોય, તો તે એક ચોરસ થશે.

પ્રશ્ન.

(૧) એક લીટી ઉપર કેટલા ચોરસ બનાવી શકાય ?

(૨) બરોબર બાજૂ ઉપરના ચોરસ પણ બરોબરજ હોવા જોઇએ.

(૩) જો બે લીટીઓ બરોબર હોય તો એક લીટી ઉપ-રનો ચોરસ બીજી લીટી ઉપરના ચોરસની બરોબર થશે. (કર્ણ દોરવાથી જે બબે ત્રિકોણો થશે તે સેહેજમાં બરોબર છે એવું સાબિત થઇ શકશે.)

સિદ્ધાંત ૪૭. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક કાટખૂણ ત્રિકોણમાં કર્ણ ઉપર કહાડેલો ચોરસ બીજી બે બાજૂઓ ઉપર કહાડેલા ચોરસના સરવાળાની બરોબર છે

સાધન

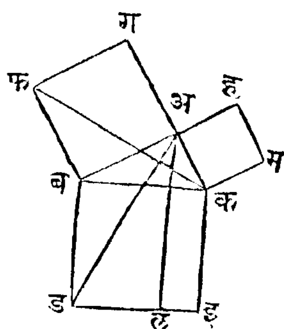
ધારોકે अबक એક કાટખૂણ ત્રિકોણ છે,

જેનો बअक ખૂણો કાટખૂણો છે;
તો बक કર્ણ ઉપર કહાડેલો ચોરસ
બે બાજૂઓ बअ, अक ઉપર કહાડેલા ચોરસોના સર્વાળાની બરોબર છે.

રચના.

कब લીટી ઉપર बडइक ચોરસ દોરો. (૧.૪૬)
અને बअ, अक ઉપર बअगफ, अकमह ચોરસો દોરો.
अ બિંદુમાંથી अल લીટી बड અથવા कइને સમાન્તર દોરો; (૧.૩૧)
અને अड, फक સાંધો.

સિદ્ધતા.



હવે बअक અને बअग દરેક કાટખૂણો છે.
માટે कअ, अग, લીટીઓ એ કજસીધી લીટીમાં છે. (૧.૧૪)
વળી कबड ખૂણો फबअ ખૂણાની બરોબર છે,
કારણકે દરેક કાટખૂણો છે,
તેઓમાં अबक ખૂણો ઉમેરો;
ત્યારે આખો ખૂણો अबड આખા ખૂણા फबक ની બરોબર છે.
ત્યારે अबड, फबक ત્રિકોણોમાં,
{ अब લીટી फब ની બરોબર છે.
અને बड લીટી बकની બરોબર છે,
અને अबडખૂણો फबक ખૂણાની બરોબર છે.
માટે, अबड ત્રિકોણ फबक ત્રિકોણની બરોબર છે. (૧.૪)

હવે વલ સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ અબડ ત્રિકોણનો બમણો છે.

કારણકે તેઓ એકજ પાયા વડ ઉપર અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ વડ અને અલ ની વચ્ચે છે.(૧.૪૧)

અને ગવ ચોરસ ફવક ત્રિકોણનો બમણો છે,

કારણ કે તેઓ એકજ પાયા ફવ ઉપર અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ ફવ, ગક ની વચ્ચે છે. (૧.૪૧)

પણ સરખી વસ્તુઓનાં બમણાં સરખાંજ હોવાં જોઇએ; (પ્ર. પ્ર. ૬)

માટે વલસ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ ગવ ચોરસની બરોબર છે.

એજ પ્રમાણે, અઙ, વમ સાંધવાથી, એમ સિદ્ધ કરી શકીશું કે કલ સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ કહ ચોરસની બરોબર છે.

માટે આખો ચોરસ વઙ, બે ચોરસો વગ અને હક ના સર્વાળાની બરોબર છે.

એટલે, વક કર્ણ ઉપર કહાડેલો ચોરસ બે બાજૂઓ અબ, વક ઉપર કહાડેલા ચોરસોના સર્વાળાની બરોબર છે

માટે એક કાટખૂણ ત્રિકોણમાં ઇ૦ પ્ર૦ સિ૦

ટીપઃ—હરેક ચોરસ બહારથી દોરેલો છે; પણ તેમ કરવું આવશ્યક નથી; બધા અંદર પડતા અથવા હરકોઈ એક અથવા બે અંદર પડતા કહાડીશું તોપણ સિદ્ધતા મળી શકશે; માટે જૂદી જૂદી આઠ આકૃતિઓ થઈ શકે.

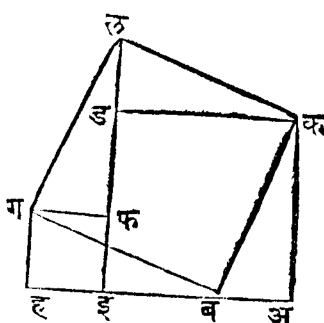
(૨) કોઈપણ બાજૂ ઉપરના ચોરસનું ક્ષેત્રફળ તે બાજૂને તેટલેજ ગુણવાથી આવે, માટે, અંકગણીતની રીતે આ સિદ્ધાંત કહેવો હોય તો એમ કહેવાય કે એક કાટખૂણ ત્રિકોણના કર્ણની લંબાઇનો વર્ગ તેની બન્ને બાજૂઓની લંબાઇના વર્ગના સર્વાળાની બરોબર છે.

(૩) માટે ત્રણમાંથી હરકોઇ બે બાજૂઓની લંબાઇ આપી હોય તો ત્રીજીની લંબાઇ નીકળી શકશે.

(૪) ગમે એટલી સીધી લીટીઓ આપી હોય તો એક એવી સીધી લીટી શોધી કહાડવી કે તેનો વર્ગ આપેલી બધી લીટીઓના વર્ગના સર્વાળાની બરોબર હોય, આ કરવું સહેલું છે, ગમે તે બે લીટી લઇને તેમને છેડેથી એકેક ઉપર લંબ મૂકવી એટલે તેમના બીજા છેડા જોડવાથી નવી લીટી નિકળશે, જેનો વર્ગ તે એના વર્ગના સર્વાળા બરોબર થશે. પછી તે લીટીને એક છેડેથી એક ત્રીજી લીટી જેટલી લંબ દોરીને, છેડા સાંધીશું તો એક નવી લીટી નીકળશે ઇ૦; એમજ વર્ગોની બાદબાકી પણ થઇ શકશે.

આ સિદ્ધાંતના જે બીજા પૂરાવા આપી શકાય છે તેમાં એક ઘણો ટુંકો અને ચતુરાઇવાળો છે એટલુંજ નહિ પણ તેમાં ૩૨ મા સિદ્ધાંત પછીનો કોઇ સિદ્ધાંત આધાર માટે લીધો નથી; અને કાગળ અથવા લાકડાના કકડા તેવા આકારના લેવાથી, એક ચોરસના કકડા ગોઠવતાં બરાબર બીજા બે ચોરસ આપણી નજર સમક્ષ થઇ શકે છે; તે એક સિદ્ધતા નીચે ટુંકામાં આપી છે.

अबक આપેલો ત્રિકોણ છે; **अ** કાટખૂણો; **अक** ઉપર **अकडइ** ચોરસ કીધો. **इड** લીટીમાંથી **इफ=बअ** કાપી. **इफ** ઉપર **इफगह** ચોરસ કીધો. **इड**ને લંબાવીને **इल=अब** કીધી; **कल**, **लग**, **गब**, સાંધી.



डल=अव ∴ डल+डफ=अव+डफ=इफ + डफ=डइ=अक
તેમજ हब=हइ+इब=अव+इब=अइ=अक.

આ ઉપરથી ચારે ત્રિકોણો अवक, बगह, लगफ અને लडक બરોબર થશે, કારણ કે દરેકમાં બે બાજૂઓ અને વચ્ચેનો કાટખૂણો સરખાં છે.

માટે लगकव આકૃતિ સમબાજૂ થઈ,

∠लकव=∠लकड+∠डकव=∠अकब+∠डकब+∠डकअ

માટે लकब કાટખૂણો થયો; એજ પ્રમાણે ચારે ખૂણા કાટખૂણા સિદ્ધ થશે, માટે એ આકૃતિ ચોરસ છે અને वक લીટી ઉપર ચોરસ છે.

એ ચોરસમાંથી બે ત્રિકોણો लडक અને लगफ બાદ કરો અને તેઓની બરોબરના ત્રિકોણો अवक અને बगह ઉમેરો તો બરાબર अड અને गइ ચોરસો થશે.

આ સિદ્ધાંત ગણિતવિદ્યાના હરેક ભાગમાં બેહદ ઉપયોગનો છે. એમાંથી હદ ઉપરાંત પરિણામો નિકળે છે. આખી ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વોમા એ ઘણોજ પ્રખ્યાત છે એટલું જ નહિ પણ એના ઉપર માપણીના બધા સિદ્ધાંતો તથા ત્રિકોણમિતિની વિદ્યા આધાર રાખે છે.

કહે છે કે એ પ્રતિજ્ઞા જ્યારે પિથાગોરસે શોધી કહાડી અને તેની સત્યતા વિશે જ્યારે તેને પહેલું જ્ઞાન થયું ત્યારે તને એટલો હર્ષ પ્રાપ્ત થયો કે તેણે એકસો જનાવરનો મ્હોટો બલિદાન દેવતાઓને આપ્યો (અર્પણ કર્યો).

પ્રશ્ન.

(૧) આકૃતિ ઉપરથી સાબિત કરો કેઃ—

(૧) बग, कह જોડિયે તો તેઓ સમાન્તર થશે;
(૨) फ, अ, म બિંદુઓ એકજ સીધી લીટીમાં છે;
(૩) फक અને अड એકેકને લંબ છે;

(૨) એક ચોરસના કર્ણ ઉપર દોરેલો ચોરસ અસલ ચોરસનો બમણો થશે.

(૩) જો કોઇપણ ત્રિકોણના શિરોબિંદુથી પાયા ઉપર લંબ દોરી, તો ખંડો (પાયાના બે ભાગો) ના વર્ગની બાદબાકી તે બે બાજૂઓના વર્ગની બાદબાકીની બરોબર થશે.

(૪) બે કાટખૂણ ત્રિકોણમાં એકનો કર્ણ અને એક બાજૂ અનુક્રમે બીજાના કર્ણ અને એક બાજૂની બરોબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર થશે.

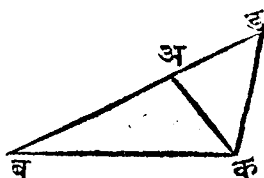
(૫) એક લીટી એવી શોધી કહાડો કે તે ઉપરનો ચોરસ બે આપેલી લીટીઓના ચોરસની બાદબાકી બરોબર થાય.

(૬) એક આપેલી સીધી લીટીના બે એવા ભાગ કરો કે એક ભાગ ઉપરનો ચોરસ બીજા ભાગ ઉપરના ચોરસનો બમણો થાય.

સિદ્ધાંત ૪૮. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ-જો એક ત્રિકોણની એકબાજૂ ઉપર કીધેલો ચોરસ બીજી બે બાજૂ ઉપરના ચોરસોના સર્વાળાની બરોબર હોય, તો તે બે બાજૂઓની વચ્ચેનો ખૂણો કાટખૂણો થશે.

સાધન.



ધારો કે अबक એક ત્રિકોણ છે; અને बक ઉપર કહાડેલા ચોરસ अब, अक ઉપરના ચોરસોના સર્વાળાની બરોબર છે; તો बअक ખુણો કાટખૂણો થશે.

રચના.

अ બિંદુમાંથી अड લીટી अकને લંબ દોરો; (૧. ૧૧)
અને अड ને अब બરોબર કરો. (૧. ૩)
डक સાંધો

સિદ્ધતા.

અડ લીટી અબ ની બરોબર છે, (રચ.)

માટે અડ લીટી ઉપરનો ચોરસ અબ લીટી ઉપરના ચોરસની બરોબર થશે. (૧. ૪૬ પ્રશ્ન ૩ જો ટીપ.)

એ બન્નેમાં અક ઉપરનો ચોરસ ઉમેરો;

તો કઅ અને અડ ઉપરના ચોરસોનો સર્વાળો કઅ અને અબ ઉપરના ચોરસોના સર્વાળાની બરોબર છે.

પણ કઅડ ખૂણો કાટખૂણો છે, (રચ.)

માટે કડ ઉપરનો ચોરસ અક, અડ ઉપરના ચોરસના સર્વાળાની બરોબર છે. (૧. ૪૭)

પણ (પ્રતિજ્ઞા પ્રમાણે) બક ઉપરનો ચોરસ અક, અબ ઉપરના ચોરસોના સર્વાળાની બરોબર છે;

માટે કડ ઉપરનો ચોરસ બક ઉપરના ચોરસની બરોબર છે.

માટે કડ બાજૂ પણ બક બાજૂની બરોબર હોવી જોઇએ.

માટે ડઅક, બઅક ત્રિકોણોમાં,

અડ લીટી અબ ની બરોબર છે.
અને અક બન્નેમાં સાધારણ છે.
અને ત્રીજી બાજૂ કડ ત્રીજી બાજૂ બકની બરોબર છે,

માટે, ડઅક ખૂણો બઅક ખૂણાની બરોબર છે. (૧.૮)

પણ ડઅક કાટખૂણો છે; (રચ.)

માટે બઅક પણ કાટખૂણો થયો.

માટે જો એક ત્રિકોણની એક બાજૂ ઉપર ઇ૦ પ્ર. સિ.

પ્રશ્ન.

(૧) ૪૭ અને ૪૮ મા સિદ્ધાંતો વચ્ચે શો સંબંધ છે?

(૨) આ સિદ્ધાંતનો પુરાવો કેવા પ્રકારનો છે? અને ભૂમિતિના પહેલા પુસ્તકમાં એવા પુરાવાથી કયા સિદ્ધાંતો સાબિત કીધા છે? તેમ કરવાનું કારણ શું?

(૩) જો अबक ત્રિકોણમાં अब બાજૂ अवની બમણી હોય, અને अकનો વર્ગ अबના વર્ગનો ત્રણ ગણો હોય તો बअक ખૂણો કાટખૂણો થશે,

છેલ્લા ત્રણ સિદ્ધાંતો ઉપર પ્રશ્ન.

(૧) કોઈ પણ લીટી ઉપરનો ચોરસ તે લીટીના અર્ધ ઉપરના ચોરસનો ચાર ગણો થશે; અને તેના એક તૃતીયાંશ ઉપરના ચોરસનો નવ ગણો થશે.

(૨) એક ત્રિકોણની એક બાજૂ ઉપરનો ચોરસ બીજી બે બાજૂઓ ઉપરના ચોરસના સર્વાળાથી વધારે હોય; તો તે બાજૂઓ વચ્ચેનો ખૂણો પહોળોખૂણો હોવો જોઇએ.

(૩) એક સમદ્વિબાજૂ કાટખૂણું ત્રિકોણના કર્ણ અને એક બાજૂ વચ્ચે શો સંબંધ છે?

(૪) એક કાટખૂણ ત્રિકોણમાં એક ખૂણો એક કાટખૂણાનો તૃતીયાંશ હોય તો બીજા ખૂણા કેટલા કેટલા થવા જોઇએ? અને તેવા ત્રિકોણની દરેક બાજૂ કર્ણનો કેટલો ભાગ થશે?

(૫) એક સમબાજૂ ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી સામેની બાજૂ ઉપર દોરેલી લંબ દરેક બાજૂનો કેટલો ભાગ થશે?

(૬) એક કાટખૂણ ત્રિકોણના કાટખૂણાથી કર્ણ ઉપર લંબ દોરીને કર્ણના દરેક ભાગના વર્ગના સર્વાળામાં લંબના વર્ગનું બમણું ઉમેરિયે તો કર્ણના વર્ગ બરોબર થશે.

(૭) એક ચોરસ એવો બનાવો કે તે બે આપેલા ચોરસના સર્વાળા બરોબર થાય.

(૮) એક આપેલી સીધી લીટીના બે એવા ભાગ કરો કે તેઓના વર્ગનો સર્વાળો એક આપેલી લીટીના વર્ગની બરોબર થાય.

સમાપ્ત.